Revista Bases de la Ciencia - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 4, Nº 1, Enero/Abril, 2019, Ecuador (75-81)

Ciencias Matemáticas

Artículo de Investigación

OPERADORES UNIFORMEMENTE ESTABLES Y SUBESPACIOS INVARIANTES

Dr. Edixo Rosales[1*]

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias. Maracaibo, Venezuela
[*]Autor para la correspondencia. E-mail: edixorosales@gmail.com

Recibido: 14-6-2018 / Aceptado: 27-11-2018

RESUMEN

Este trabajo estudia operadores uniformemente estables sobre espacios de Banach en general, con el propósito de caracterizar algunos que tengan subespacios invariantes no triviales.

Palabras clave: Operadores Uniformemente estables, subespacios invariantes.

UNIFORMLY STABLE OPERATORS AND SUB INVARIANT SPACES

ABSTRACT

This paper studies uniformly stable operators on Banach spaces in general, with the purpose of characterizing some that have non-trivial invariant subspaces.

Key words: Uniformly stable operators, sub invariant spaces.

OPERADORES UNIFORMAMENTE ESTÁVEIS E SUBESPAÇOS INVARIANTES

RESUMO

Este artigo estuda operadores uniformemente estáveis em espaços de Banach em geral, com o objetivo de caracterizar alguns que apresentam subespaços invariantes não triviais.

Palavras-chave: Operadores uniformemente estáveis, subespaços invariantes.

1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación está orientada a caracterizar operadores uniformemente estables que tengan subespacios invariantes.

El problema de hallar subespacios invariantes no triviales, de operadores definidos sobre espacios de Banach, es de vieja data (Bothelo & Ewerton, 2017).

Matemáticos como Halmos, Erdos y el ruso Lomonósov (Halmos 1982) han abierto el camino y resuelto parcialmente este problema. Bravo, alumno de Erdos en la Universidad de Berkeley en California, resolvió muchas interrogantes sobre el tema en su tesis doctoral (Bravo 1980). En general, el profesor Bravo trabajó sobre espacios de Hilbert separables.

En el 2007, el profesor Bravo, hoy ausente, dejó un trabajo inédito sobre el tema de encontrar subespacios invariantes de operadores casi nilpotentes. Hemos retomado el tema y trabajado en general sobre operadores uniformemente estables.

Asumo que el lector está familiarizado con la teoría de los espacios de Banach. Sin embargo, es pertinente señalar que las referencias (Kreyszig 1978; Rosales 2011) son textos que recogen la teoría básica de los operadores y nuestros preliminares pueden servir de orientación.

2. PRELIMINARES

En este trabajo X denotará un espacio de Banach sobre los números complejos y X* su espacio dual.

De igual manera, $B(X)$ será la familia de los operadores acotados sobre el espacio de Banach X. Algunas veces trabajaremos con $B(X,Y)$ operadores entre espacios de Banach X,Y distintos.

Un subespacio M del espacio de Banach X significará un subespacio cerrado en la topología de la norma. Diremos que M es invariante para $T \in B(X)$ si $T(M) \subset M$. Por $lat(T)$ entenderemos la familia de todos los subespacios invariantes para T. Es claro que $\{0\}$, $X \in lat(T)$ y se les llaman sus subespacios invariantes triviales. Se dice que M es hiperinvariante para T si $M \in lat(A)$, para cada operador $A \in B(X)$ tal que $A \circ T = T \circ A$.

Un operador $T \in B(X)$ se dice que converge uniformemente al operador nulo, o que es uniformemente estable si $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\| = 0$. Se escribe $T^n \xrightarrow{u} 0$ para indicar la estabilidad uniforme. Caso particular de los operadores uniformemente estables son los nilpotenes y casi nilpotentes. Un $T \in B(X)$ es nilpotente, si $T^n = 0$ para alguna potencia $n > 1$. Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = 0$, se dice que el operador T es casi nilpotente. Es claro que todo operador nilpotente es casi nilpotente.

Un operador $T \in B(X)$ se dice que es compacto, si dada una sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$, existen $y \in X$ y una sub-sucesión $\{x_{n_k}\}$ tales que $\lim_{n\to+\infty} \|T(x_{n_k}) - y\| = 0$. Denotaremos por $K(X)$ la familia de los operadores compactos. Un caso particularmente importante de operadores compactos son los de rango finito. Un $T \in B(X)$ es de rango finito si $T(X)$ es de dimensión finita. Es conocido que $K(X)$ es un ideal en el álgebra de operadores $B(X)$ y si $T_n \in K(X)$ y $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$, entonces $T \in K(X)$.

Dado $T \in B(X)$, por $T' \in B(X^*)$ entenderemos el operador $T^{'}(f) = f \circ T$ llamado el adjunto de T. Si $M \in lat(T)$, entonces $M^{\perp} = \{f \in X^*: f(M) = 0\} \in lat(T')$. Si $f \in X^*$ escribiremos $f(x) = \langle x, f\rangle$.

Finalizamos diciendo que si H es un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$, se garantiza la existencia de $T^* \in B(H)$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. Aquí $\langle x, y\rangle$ denota el producto escalar definido sobre el espacio de Hilbert H. Un espacio de Hilbert importante y que usaremos es $H = l_2(Z^+)$ formado por las sucesiones $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, ..)$, $\alpha_n \in C$ tales que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

3. OPERADORES UNIFORMEMENTE ESTABLE Y SUBESPACIOS INVARIANTES

El siguiente resultado es fundamental en este estudio

Lema 2.1. Sea X un espacio de Banach y $T \in B(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $T^n \overset{u}{\to} 0$
b) $r(T) < 1$
c) Existen $\alpha \in (0,1)$, $\beta \geq 1$, tales que $\|T^n\| \leq \beta\alpha^n \leq, \forall\, n \geq 1$.

Demostración: Para la prueba ver la referencia (Kubrusly 2008, página 79, problema 8.6).

Una consecuencia de este resultado es el siguiente:

Teorema 2.1: Sea X un espacio de Banach y T∈B(X) uniformemente estable.

(1) Si $\{\beta_n: n \geq 1\}$ es una sucesión de números complejos acotada, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n T^n$ es una serie absolutamente convergente en $B(X)$.

(2) Si $f \in H(D(0,r)), f(0) \neq 0, f(T) = 0$ (Es decir T es un operador analítico); entonces T es nilpotente.

Demostración: (1) Sea $M > 0$ tal que $|\beta_n| \leq M, \forall\, n \geq 1$. Si α

$\alpha \in (0,1),\ \beta \geq 1$ con $\|T^n\| \leq \beta\alpha^n, \forall\, n \geq 1$, entonces

$\sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n|\ \|T^n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n| \beta\alpha^n \leq M\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n < +\infty$.

(3) Sea $f \in H(D(0,r))$ tal que $f(T) = 0$, además con

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n z^n, \qquad |z| < r$$

Puesto que $f(z) = z^n g(z),\ g(0) \neq 0, g \in H(D(0,r))$, entonces existe $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{z}) \in \mathrm{H}(\mathrm{D}(0,\mathrm{s})\ (\mathrm{s} < \mathrm{r})$ con $g(z)\left(g^{-1}(z)\right) = 1, \forall\, z \in H(D(0,s))$.

Nosotros tenemos que $g^{-1}(T)$ es definible por la primera parte de la prueba.

Finalmente $0 = f(T) = T^n \circ g(T) \Longrightarrow 0 = T^n \circ g(T) \circ g(T)^{-1} = T^n$

El siguiente teorema generaliza el principal resultado estudiado por Bravo 2007, para operadores casi nilpotentes y es nuestro principal objetivo

Teorema 2.2: Si X es un espacio de Banach y $T \in B(X)$ un operador no nulo uniformemente estable, entonces existe una familia de operadores compactos $\{S_{x_0}: X \to l_2(Z^+)\}_{x_0 \in X^*}$ tales que $S_{x_0} \circ T = W^* \circ S_{x_0}$, donde W^* es el operador adjunto del operador de desplazamiento a izquierda de multiplicidad uno. Además, T tiene subespacio invariante no trivial, si y sólo si, S_{x_0} es no trivial y $ker(S_{x_0}) \neq \{0\}$ para algún $x_0 \neq 0$. Finalmente, si T es un operador no escalar T, ni casi nilpotente y $\overline{S_{x_0}(X)} \subsetneq l_2(Z^+)$ para algún $x_0 \neq 0$; entonces T' tiene subespacios hiperinvariantes no triviales.

Demostración: Para cada $x_0 \in X^*$ consideremos el operador $S_{x_0}: X \to l_2(Z^+)$ definido por:

$S_{x_0}(x) = (\langle x, x_0\rangle, \langle T(x), x_0\rangle, \dots, \langle T^n(x), x_0\rangle, \dots), \forall\, x \in X.$

Puesto que $T^n \overset{u}{\to} 0$, podemos encontrar: $\alpha \in (0,1),\ \beta \geq 1$ con $\|T^n\| \leq \beta\alpha^n, \forall\, n \geq 0 \Longrightarrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T^n(x), x_0\rangle,|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n(x)\|^2\ \|x_0\|^2 \leq \beta\|x_0\|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n < +\infty.$

Se deduce que S_{x_0} está bien definida.

Por otro lado, si consideramos

$S_n(x) = (\langle x, x_0\rangle, \langle T(x), x_0\rangle, \dots, \langle T^n(x), x_0\rangle, 0, 0, \dots), \forall\, x \in X$, tenemos que

los $S_n(x)$ son operadores de rango finito y como

$\left\|(S_{x_0} - S_n(x))\right\| = \|(0,0,\dots,0,\langle T^{n+1}(x), x_0\rangle, \langle T^{n+2}(x), x_0\rangle,,\dots)\|^2 \leq$

$\beta^2\|x_0\|^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha^{2k} \leq \frac{\beta^2\|x_0\|^2\alpha^{2(n+1)}}{1-\alpha}$, tenemos que S_{x_0} es un operador compacto.

Si nosotros definimos: $W: l_2(Z^+) \to l_2(Z^+)$ por

$W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) = (0, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots), \forall\, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in\ l_2(Z^+)$, tenemos que W es un operador de desplazamiento a izquierda de multiplicidad uno.

Si definimos $W^*(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots) = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots), \forall\, (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots) \in\ l_2(Z^+)$ tenemos que W^* es el operador adjunto del operador de desplazamiento a izquierda de multiplicidad uno anteriormente definido

Por otro lado

$(W^* \circ S_{x_0})(x) = W^*(\langle x, x_0\rangle, \langle T(x), x_0\rangle, \dots, \langle T^n(x), x_0\rangle, \dots) =$

$(\langle T(x), x_0\rangle, \dots, \langle T^n(x), x_0\rangle, 0,0, \dots) = S_{x_0}(T(x)), \forall\, x \in X \Longrightarrow$

$S_{x_0} \circ T = W^* \circ S_{x_0}$ (*).

Sea $M \in lat(T),\ M \neq \{0\}, X$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional no nulo $x_0 \in X^*$, tal que $x_0(M) = \{0\}$. Si $x \in M$, luego $T^n(x) \in M \Longrightarrow x_0(T^n(x)) = 0, \forall n \geq 0 \Longrightarrow$ $S_{x_0}(x) = 0, \forall\, x \in M$.

Se deduce que $ker(S_{x_0}) \neq \{0\}$.

Por otro lado, si $ker(S_{x_0}) \neq \{0\}$, para algún x_0, entonces $ker(S_{x_0})$

es un subespacio invariante de T por (*).

Finalmente, sea $x_0 \neq 0$ y $\overline{S_{x_0}(X)} \subsetneq l_2(Z^+)$.

Si $(\beta_1, \beta_2, \dots) \in (S_{x_0}(X))^{\perp}$, podemos definir el operador

$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n{}^*(T')^n$ (**) ($\beta_n{}^*$ denota el conjugado de β_n).

El operador A no es nulo, como consecuencia del teorema 2.1 en su segunda parte, y $A(x_0)(x) = \langle S_{x_0}(x), \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}\rangle = 0$. Si $M = kerA$, entonces M es un subespacio hiperinvariante no trivial de T' por (**).

Nota 2.1. Sea $T = \lambda I$ un operador escalar con $|\lambda| < 1$. Es claro que $T' = \lambda I$. Nosotros vamos a demostrar que $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n{}^*(T')^n$ definido en el teorema anterior es el operador nulo.

En efecto, dado $x \in X$ con $x_0(x) \neq 0$, entonces

$\langle S_{x_0}(x), \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}\rangle = (\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n{}^*\, \lambda^n) x_0(x) = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n{}^*\, \lambda^n = 0.$

Se deduce que el operador $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n{}^*(T')^n = 0$.

Nota 2.2. Supongamos que $\bigvee_{n=0}^{+\infty}(T')^n(x_0) = X^*$ (es decir x_0 es cíclico), entonces S_{x_0} es un operador inyectivo.

Si $S_{x_0}(x) = (\langle x, x_0\rangle, \langle T(x), x_0\rangle, \dots, \langle T^n(x), x_0\rangle, \dots) = 0 \;\; (x \neq 0) \Longrightarrow x_0\big(T^n(x)\big) = 0 \; \forall \; n \geq 0 \; (*)$. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos hallar $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$.

Existe una red de polinomios

$P_d(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^d{}_k Z^k$, tal que $P_d(T')(x_0) \overset{u}{\to} \varphi$. Por (*) deducimos que $P_d(T')(x_0)(x) = 0$ y como $P_d(T')(x_0)(x) \to \varphi(x)$, deducimos que $\varphi(x) = 0$, lo que es una contradicción.

Finalizamos este trabajo con el siguiente resultado

Teorema 2.3: Si X es un espacio de Banach y $T \in B(X)$ es uniformemente estable, no escala, ni casi nilpotente y existe $A \in B(l_2(Z^+), X)$ tal que $dim(T \circ A - A \circ W^*)(B\big(l_2(Z^+)\big) = 1$, donde W es el operador definido en el teorema anterior; entonces T' tiene subespacio invariante no trivial.

Demostración: Por el teorema anterior se tiene que

$S_{x_0} \circ T = W^* \circ S_{x_0} \Longrightarrow (T \circ A - A \circ W^*) \circ S_{x_0} =$

$T \circ A \circ S_{x_0} - A \circ W^* \circ S_{x_0} = T \circ A \circ S_{x_0} - A \circ S_{x_0} \circ T \Longrightarrow$

$dim\big(T \circ A \circ S_{x_0} - A \circ S_{x_0} \circ T\big)(X) \leq 1$.

Si $A \circ S_{x_0} = 0$, entonces $\overline{S_{x_0}(X)} \subsetneq l_2(Z^+)$, ya que de lo contrario $A = 0$.

Por el resultado anterior T' tiene subespacio hiperinvariante no trivial M.

Si $A \circ S_{x_0} \neq 0$, por ser compacto, por el teorema de extensión de Lomonósov (Kubrusly 2008), se deduce que T tiene un subespacio hiperinvariante no trivial M; entonces $M^{\perp}$ es invariante no trivial para T'.

4. REFERENCIAS

Bothelo, G., Ewerton, R. (2017). Two-sided polynomial ideals on Banach Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Bravo, J. (1980). Relations between latT,lat T^(-1),lat T^2 and operators with compact imaginary parts. Ph.D. Dissertation. Berkeley. California.

Bravo, J. (2007). Operadores casi nilpotentes y subespacios invariantes. Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia.

Halmos, P. (1982). A Hilbert Space Problem Book. (Graduate Text in Mathematics).Springer Science.

Kubrusly, C. (2008). Hilbert Space Operators. A Problem Solvind Approach. Birkhauser. Boston.

Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons.

Rosales, E. (2011). Operadores Casi Llenos y de Radio Numérico Alcanzable. Ediciones del Vicerrectorado Académico de la Universidad del Zulia.