

CONJETURA DE GOLDBACH, NÚMEROS NATURALES Y TEOREMA DE NÚMEROS PRIMOS

Ing. Yandry Intriago Delgado^{1*}

¹Docente a tiempo completo "Unidad Educativa Fiscal Rocafuerte".

*Autor para la correspondencia. E-mail: yanmar83@hotmail.com

Recibido: 30-11-2018 / Aceptado: 30-1-2019

RESUMEN

Mediante el uso de Geogebra en el siguiente manuscrito se realiza un análisis de la conjetura de Goldbach, posteriormente se comprueba mediante expresiones algebraicas que siempre existe una cantidad mínima de elementos primos que hacen que se cumpla la conjetura para cualquier número natural par ($2N$). Se toma en consideración el gráfico que es generado mediante el Método Gráfico de la Conjetura de Goldbach, en el que se examinan cada una de las variables que intervienen en el eje de las ordenadas y las abscisas. Luego de esto, se estudian ciertos números pares conocidos en los que se sabe la cantidad de primos existentes, posteriormente se separa a cualquier número $2N$ en intervalos desde 1 a N y desde N hasta $2N$, encontrando así que la cantidad de primos en el primer intervalo mencionado es superior a la cantidad de elementos primos del segundo, con estos resultados y el análisis realizado a la gráfica del Método Gráfico antes mencionado, se llega a la conclusión que la distribución de los primos está relacionada con la función logaritmo natural; tal como está expresado en el Teorema de los Números Primos, pero en este caso; con una ligera variante para cada uno de los intervalos antes mencionados. Se realiza posteriormente un análisis de probabilidad que comprueba que la cantidad de intersecciones que se producen está intrínsecamente relacionada con las funciones que limitan la cantidad de elementos primos, que esto a su vez también se relaciona con la función $\pi(x)$ propuesta por Gauss.

Palabras clave: Conjetura Goldbach, Teorema, números primos.

GOLDBACH CONJECTURE, NATURAL NUMBERS AND THE PRIME NUMBERS THEOREM

ABSTRACT

By using Geogebra in the following manuscript, an analysis of the Goldbach conjecture is made. It has been verified through algebraic expressions that there is always a minimum amount of prime elements that make the conjecture for any natural pair number ($2N$). The graph that is generated by the Graphical Method of the Goldbach Conjecture is taken into consideration, in which the variables that intervene in the axis of the ordinates and the abscissas are examined. After this, certain known even numbers were studied which the number of existing prime numbers is known. Later, it is separated from any $2N$ number in intervals from 1 to N and from N to $2N$, thus, finding the prime numbers in the first one. The aforementioned interval is greater than the number of prime elements of the second, with these results and the analysis made to the graph of the aforementioned Graphic Method, it is concluded that the distribution of the primes is related to the natural logarithm function; as it is expressed in the Theorem of the Prime Numbers, but in this case with a slight variant for each of the aforementioned intervals. A probability analysis to verify that the number of intersections that

occur is intrinsically related to the function that limits the number of prime elements was performed. This is also related to the function $\pi(x)$ proposed by Gauss.

Key words: Goldbach conjecture, Prime number, theorem.

CONJECTURA DE GOLDBACH, NÚMEROS NATURAIS E O TEOREMA DE NÚMEROS PRIMOS

RESUMO

Usando Geogebra no seguinte manuscrito, uma análise da conjectura de Goldbach é feita, depois é verificado por expressões algébricas que há sempre uma quantidade mínima de elementos primos que fazem a conjectura para qualquer número natural par ($2N$). O gráfico que é gerado pelo Método Gráfico da Conjectura de Goldbach é levado em consideração, no qual cada uma das variáveis que intervêm no eixo das ordenadas e das abscissas é examinada. Depois disto, nós estudamos certos números pares conhecidos nos quais o número de primos existentes é conhecido, então ele é separado para qualquer número $2N$ em intervalos de 1 a N e de N a $2N$, achando que o número de primos no primeiro intervalo acima mencionado é maior que o número de elementos primos do segundo, com esses resultados e a análise feita no gráfico do Método Gráfico supracitado, conclui-se que a distribuição dos primos está relacionada à função do logaritmo natural; como expreso no Teorema dos Números Primos, mas neste caso; com uma ligeira variante para cada um dos intervalos acima mencionados. Uma análise de probabilidade é então realizada, que verifica que o número de interseções que ocorrem está intrinsecamente relacionado às funções que limitam o número de elementos primos, que por sua vez também se relaciona com a função $\pi(x)$ proposta por Gauss.

Palavras-chave: Conjectura de Goldbach, Teorema, dos números primos.

1. INTRODUCCIÓN

Christian Goldbach (1690-1764) afirmó que: “Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de 2 números primos”. A lo largo de la historia notables matemáticos han puesto su interés en este postulado. En mayo de 2013, con el uso de técnicas matemáticas avanzadas se publicó un artículo en el cual se demostraba la conjetura débil de Goldbach, la cual afirma que: “Todo número impar se puede expresar como la sumatoria de 3 números primos”, (Helfgott, 2014). Dada la abundante información que se encuentra en internet, la influencia de divulgadores matemáticos como Paenza, según el video de YouTube “Números primos” ... (EduMates, 2010) o Sáenz; según el video de YouTube “Los números primos más grandes del mundo y ¡el enigma de los números perfectos!” ... (Derivando, 2017). El enfoque encontrado en L'ipotesi di Goldbach da una Congettura Statistica ad una Congettura Matematica (Salmeri & Salmeri, 2002); y en obras como The Number Mysteries (du Sautoy, 2010) y “La Soledad de los Números Primos” (Giordano, 2010); en el presente trabajo investigativo se ha desarrollado un estudio a partir del esquema triangular utilizado en Método gráfico de la conjetura de Goldbach (Intriago, 2018), siendo una herramienta eficaz para

visualizar los pares de números primos que hacen que se cumpla con la conjetura para todo número par.

Johann Carl Friedrich Gauss en su Teorema de los números primos demuestra la función $\pi(x)$ (Sánchez, 2011), a partir de este punto se han desarrollado métodos para calcular la cantidad de pares de primos, uno de los cuales es la criba de Selberg (Deshouillers, Granville, Narkiewicz, Pomerance, 1993; Ramachandra, 1997).

En este manuscrito, se hace una ligera modificación a la función que utilizó el matemático francés Adrien-Marie Legendre (Zagier, 1977). Luego se calcula la probabilidad de intersección que posee un conjunto de números primos presente en el intervalo de 1 hasta el número par evaluado, obteniendo las funciones $f(N)$ y $g(N)$; que, al ser restadas, muestran la cantidad mínima de intersecciones que posee un determinado número par, lo cual hace que se cumpla la conjetura de Goldbach.

2. MÉTODO GRÁFICO DE LA CONJETURA DE GOLDBACH Y ANÁLISIS DE LOS NÚMEROS NATURALES \mathbb{N}

La distribución de pares de primos se da mediante una colocación que relaciona el número natural con su par correspondiente en el eje de las abscisas y la colocación de los números primos en el eje de las ordenadas (Intriago, 2018). Tal como se lo muestra en la **Figura 1**.

| Numero primo | ordinal | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 23 | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| secuencia N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| secuencia par(2N) | | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 1. Relación de los números pares y la Conjetura de Goldbach

A continuación, en la **Figura 2** se analizarán dos números naturales (N) con sus respectivos duplos (2N).

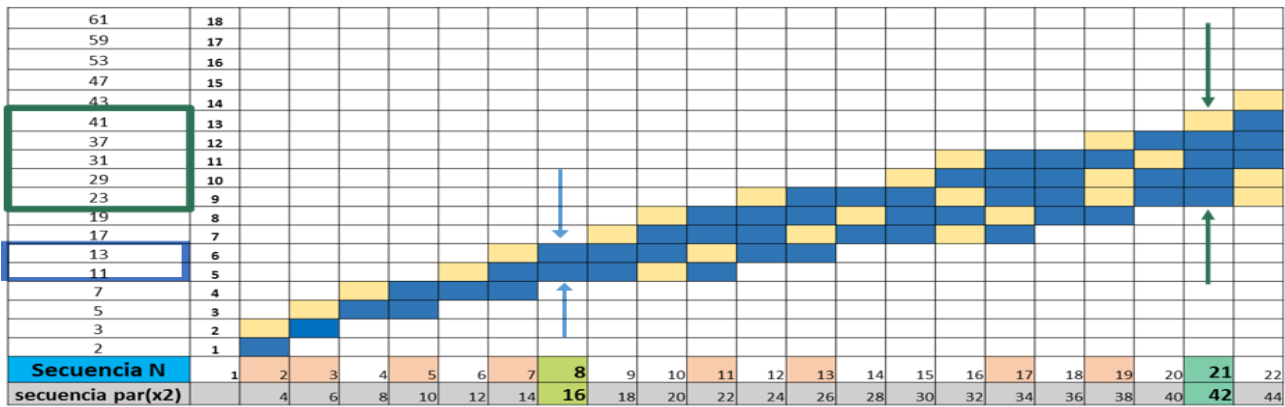


Figura 2. Distribución de pares generados para los números pares 16 y 42.

Se revisarán los números N y $2N$ correspondientes; en el primer caso $N = 8$ y $2N = 16$, dentro de este rango hay dos números primos que son el 11 y el 13. Antecedan a esta distribución los números primos 2, 3, 5 y 7. Se examinará a continuación el número par 42; entre los números $N = 21$ y $2N = 42$ existen 5 elementos primos: 23, 29, 31, 37 y 41. Los cuadros azules indican intersecciones válidas; nótese que no todos estos espacios ocupados por los números antes mencionados producen combinaciones efectivas de valores que cumplen con la Conjetura de Goldbach; cabe mencionar que la forma de la gráfica bajo la curva se asemeja a la función logaritmo natural: $\ln N$. A continuación, en la **Figura 3** se muestra el modelo bajo el cual se desarrollará esta investigación.



Figura 3. Intervalo de afectación de un número par.

Esta distribución se origina mediante triangulaciones; tal como se lo muestra en la **Figura 4**.

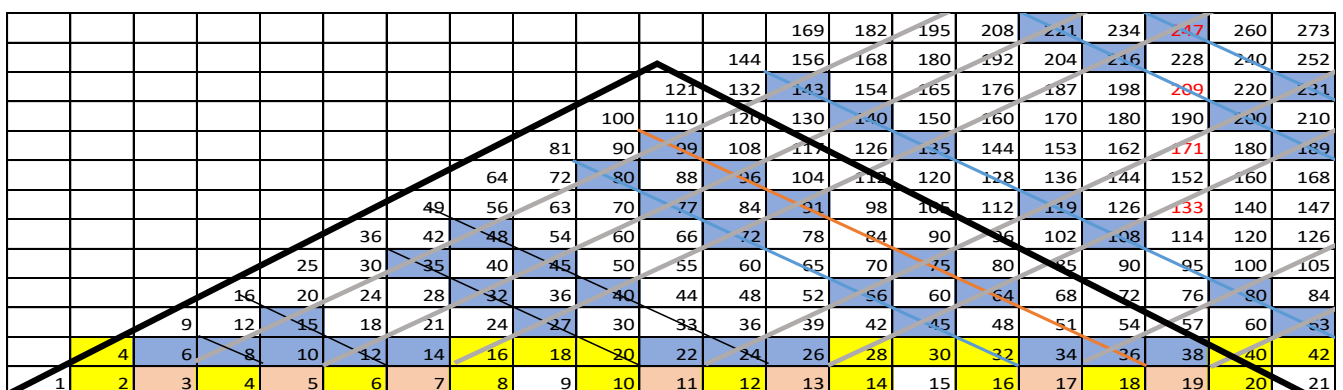


Figura 4. Triangulación realizada al número par 20

Como se puede notar de acuerdo a la triangulación efectuada, el número par evaluado no interfiere en la creación de líneas que puedan generar pares que cumplan con la conjetura de Goldbach. Como ya es conocido, para este procedimiento únicamente se grafican líneas en diagonales para los números primos. Esta forma de representar el conjunto de pares de primos que cumplen con la conjetura es similar a la desarrollada en *An Exploration on Goldbach's Conjecture* (Markakis, Provatidis, Markakis, 2013).

En la **Figura 5**, el número par evaluado es $2N$; donde N es la mitad de este número. La relación de elementos iniciará con el primer elemento de los naturales (número 1) y terminará en el elemento impar que le antecede a $2N$, es decir; $(2N - 1)$ pudiendo ser éste: primo o compuesto.



Figura 5. Intervalo de afectación de un determinado número par $2N$.

En la **Figura 6** se aprecia que en sentido vertical existe N cantidad de espacios donde puede existir intersecciones de números que cumplen con la Conjetura de Goldbach, la colocación de los espacios verticales antes mencionados corresponden a los múltiplos de N , iniciando su distribución desde (1) hasta $((N) \cdot (N))$ o N^2 .

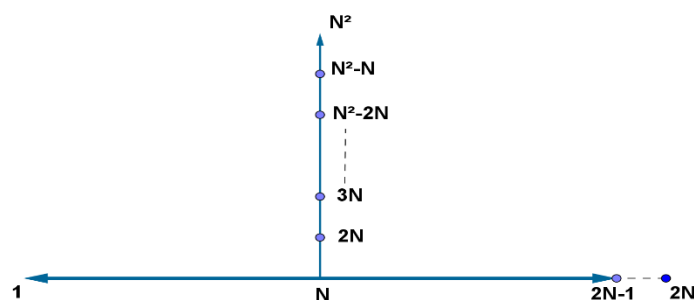


Figura 6. Relación de N en sentido vertical.

En esta distribución N puede ser par o impar, por lo tanto; podría ser un número primo. Los lugares donde existen combinaciones efectivas son los espacios que se encuentran en sentido vertical de secuencia: $N^2, N(N - 2), N(N - 4), \dots$ hasta llegar a $3N$ (vertical) cuando el natural evaluado es impar, alcanzará el punto $2N$ cuando el natural evaluado es un número par que se encuentra entre 2 números primos (primos gemelos), o cuando N es un número primo.

Si se suman los puntos 1 y $(2N - 1)$, su resultado será $2N$; así mismo, cualquier punto equidistante siempre dará como resultado el número par que se está evaluando. Como se lo muestra en la **Figura 7**.

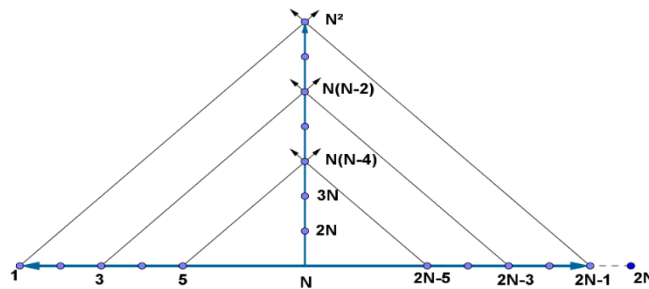


Figura 7. Lugares donde se generan intersecciones en N vertical.

No todas las intersecciones que se generan cumplirán con la Conjetura de Goldbach debido a la distribución irregular que poseen los números primos (Cilleruelo, 2000), además; se considera que, así como va creciendo la secuencia de los naturales, aumenta la cantidad de números impares compuestos y decrece la cantidad de elementos primos.

En la **Figura 8 a**. se examina la distribución que posee el número par 4.

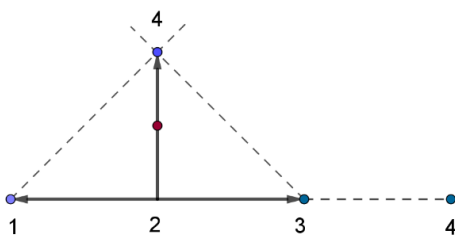


Figura 8 a. Análisis del número par 4

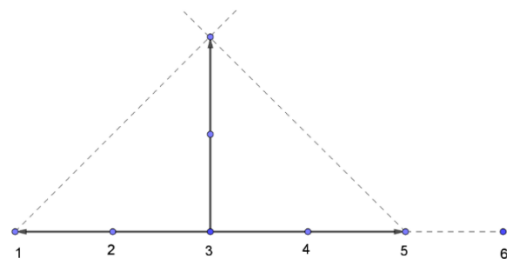


Figura 8 b. Análisis del número par 6

Como se puede notar, este número no genera una intersección efectiva; ya que únicamente se relaciona el 1 y el 3, y como es conocido, el 1 no es un número primo; sin embargo, al ser el 2 un número primo, generará una intersección al relacionarse consigo mismo. En la **Figura 8b** se observa que la única combinación que forma el primer número primo impar (número 3), es consigo mismo, para crear el número par 6.

Para esta distribución se podría considerar el siguiente intervalo de afectación para cualquier número par $[1 ; (N - 1)] \cup N \cup [(N + 1) ; 2N]$, esta expresión está representada en la **Figura 9**.

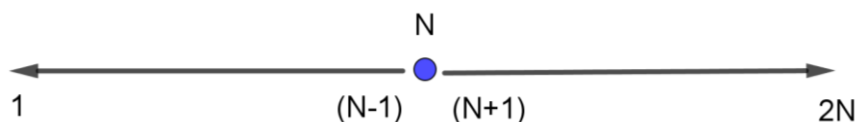


Figura 9. Análisis de intervalos de 1 a 2N.

Como se indica en la **Figura 10**, de ahora en adelante se considerará al intervalo $[1; (N - 1)]$ como “x”, y al intervalo $[(N + 1); 2N]$; como “y”

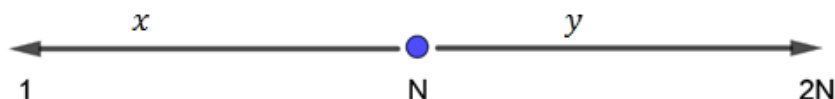


Figura 10. Delimitación de intervalos x e y.

Ejemplo 1: En la **Figura 11** se examinará al número par (N_p) 10000.



Figura 11. Análisis del número par 10000.

Para este ejemplo en x existen 2500 números impares; 668 de ellos son primos, en y igual cantidad de impares; habiendo 559 elementos primos, el 5000 es un número par.

Ejemplo 2: En la **Figura 12** se examinará al número par (N_p) 100000.



Figura 12. Análisis del número par 100000.

En este ejemplo, para x existen 25000 números impares; 5132 de ellos son primos, en y igual cantidad de impares, existiendo 4452 elementos primos, el 50000 es un número par.

Luego de analizar los ejemplos previos se puede deducir que: “x” tiene mayor cantidad de valores primos; en relación a “y” que tiene menor cantidad, como se puede apreciar en la **Figura 13**.

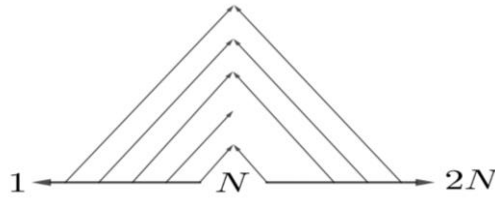


Figura 13. Análisis resultante de los ejemplos 1 y 2

Estos intervalos tienen una relación definida para números muy grandes, en donde se desconoce la cantidad de primos existentes. Es conveniente tener una estimación de la cantidad aproximada de números primos presentes en cada uno de los intervalos estudiados (x e y) que se analizaron previamente. La curva generada por la distribución mostrada en la **Figura 1** seguía un patrón similar al de la función $\ln N$ en el intervalo de 1 a $2N$. Para aproximar lo que ocurre en cada uno de los intervalos se usarán las siguientes expresiones y se realizará el siguiente análisis en la **Figura 14**:

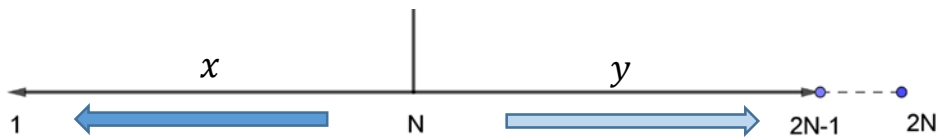


Figura 14. Análisis del valor de la constante R.

$$x_i \approx \frac{N}{\ln N + R_x} \quad (1)$$

$$y_i \approx \frac{N}{\ln N + R_y} \quad (2)$$

R_x y R_y serán constantes propias de cada intervalo estudiado, ya que como se observa en los resultados: x posee siempre más elementos primos que y .

En el intervalo x : de N a 1 como se muestra en la **Figura 14**, 1 está a la izquierda de N , por consiguiente es negativo ($-$); por lo tanto $R_x = -1$.

En el intervalo y : de N a $(2N - 1)$, como se aprecia en la **Figura 14**, N por la derecha es positivo ($+$) y alcanza su máximo en $2N - 1$, en este caso se igualará a 0 este valor.

$$2N - 1 = 0$$

$$N = \frac{1}{2} = R_y$$

Este último resultado es igual al límite del factor $\mathbb{E}(Z_n)$ utilizado por Mutafchiev (2016). Se llamará x_i (3) a la cantidad de primos existentes en el intervalo x , y se denominará y_i (4) a la cantidad de primos existentes en el intervalo y . Luego de realizar los respectivos procedimientos se tienen las expresiones:

$$x_i \approx \frac{N}{\ln N - 1} \quad (3)$$

$$y_i \approx \frac{N}{\ln N + \frac{1}{2}}$$

$$y_i \approx \frac{2N}{(2\ln N + 1)} \quad (4)$$

$$x_i > y_i$$

Ejemplo 3: Se examinará al número par $(N_p) \ 1 \times 10^{20}$.

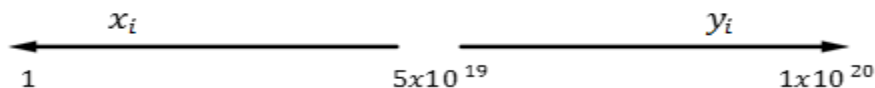


Figura 15. Análisis del número par 1×10^{20}

A partir de los datos de la **Figura 15**. Se tiene que: $N = 5 \times 10^{19}$ y $2N = 1 \times 10^{20}$

Se aplicarán las fórmulas anteriormente descritas para estimar los primos existentes en cada intervalo:

$$x_i \approx \frac{N}{\ln N - 1}$$

$$x_i \approx \frac{5 \times 10^{19}}{\ln 5 \times 10^{19} - 1}$$

$$x_i \approx 1,13 \times 10^{18}$$

$$y_i \approx \frac{N}{(2\ln N + 1)}$$

$$y_i \approx \frac{5 \times 10^{19}}{2\ln 5 \times 10^{19} + 1}$$

$$y_i \approx 1,09 \times 10^{18}$$

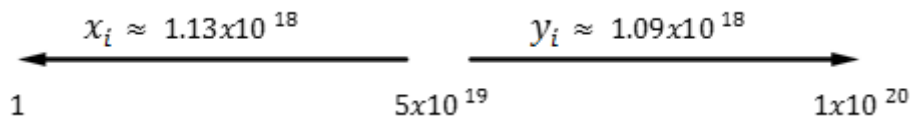


Figura 16. Distribución aproximada de primos para el número par 1×10^{20}

El número par 1×10^{20} tiene aproximadamente 1.13×10^{18} números primos en el intervalo x , y 1.09×10^{18} números primos en el intervalo y . La distribución resultante de primos está representada en la **Figura 16**. Como dato adicional $(x_i + y_i)$ representan el 2.2% de 1×10^{20} . Si al número 1×10^{20} se lo evaluara con la expresión (1) se tendría como resultado 2.21×10^{18} , que es el mismo valor que se obtendría al sumar los primos de los intervalos x_i con y_i .

2.1. Cantidad de Intersecciones, cálculo Analítico

Para todo número natural par $(2N)$ de N a N^2 en sentido vertical posee N lugares, donde probablemente existen intersecciones de Goldbach. Antes de hacer cálculos se delimitarán las variables de este problema. Primero se usará la expresión N_V para hacer referencia al lugar o los lugares donde existe una intersección de elementos impares equidistantes en sentido vertical, correspondiente a los números del conjunto vertical; los cuales son la secuencia de múltiplos de N como se lo muestra en la **Figura 17**.

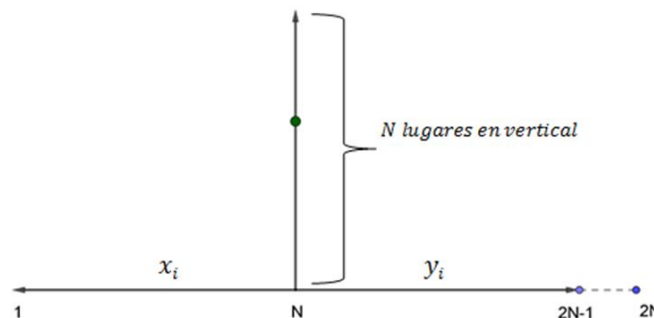


Figura 17. Delimitación de las variables x_i, y_i, N_V .

La expresión $P(\phi)$ (5) indicará la probabilidad de que en algún lugar; entre 1 y $2N$, un elemento de x por la izquierda estará en un punto equidistante con otro elemento de y por la derecha.

$$P(\phi) = P(x_i \cap y_i) \quad (5)$$

Por otro lado $D_V(\phi|V)$ (6) indica la mínima cantidad de veces en las cuales un determinado número par se ha intersectado en N vertical (N_V).

$$D_V(\phi|V) = \frac{P(x_i \cap y_i)}{P(V)} \quad (6)$$

Hay que tener en cuenta que tanto para el intervalo x ; así como en el y , los lugares que ocupan los impares son la mitad de los números naturales existentes; es decir:

$$x_i \approx \lim_{N \rightarrow (\frac{N}{2})} \frac{N}{\ln N + R_x} = \frac{N}{2(\ln(\frac{N}{2}) - 1)} \quad (7)$$

$$y_i \approx \lim_{N \rightarrow (\frac{N}{2})} \frac{N}{\ln N + R_y} = \frac{N}{(2\ln(\frac{N}{2}) + 1)} \quad (8)$$

Las expresiones (3) y (4) son equivalentes con (7) y (8) respectivamente, las mismas sirven para determinar la cantidad de primos para cualquier número N , sea este: par o impar. A continuación, se calculará la probabilidad que existe de que un elemento x_i se encuentre en algún lugar de N en el intervalo x .

$$P(x_i) = \frac{x_i}{N}$$

$$P(x_i) = \frac{\frac{N}{2(\ln(N/2) - 1)}}{\frac{N}{2}}$$

$$P(x_i) = \frac{2}{(2\ln(N/2) - 2)}$$

Por conveniencia, en este punto no se simplifica la expresión. Ahora se calculará la probabilidad de que un elemento y_i se encuentre en algún lugar de N en el intervalo y .

$$P(y_i) = \frac{y_i}{N}$$

$$P(y_i) = \frac{\frac{N}{(2\ln(N/2) + 1)}}{\frac{N}{2}}$$

$$P(y_i) = \frac{2}{(2\ln(N/2) + 1)}$$

La siguiente expresión indica la probabilidad de que tanto los elementos primos de x_i así como los de y_i se encuentran en un lugar equidistante el uno del otro.

$$P(\phi) = P(x_i) \cdot P(y_i)$$

$$P(\phi) = \left(\frac{2}{(2\ln(N/2) - 2)} \right) \cdot \left(\frac{2}{(2\ln(N/2) + 1)} \right)$$

$$P(\phi) = \frac{4}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

Luego se debe calcular la probabilidad de encontrar una intersección en N_V , en donde solo se podrían dar intersecciones en la mitad de sus elementos.

$$P(V) = \frac{1}{N/2}$$

Para finalizar:

$$D_V(\phi|V) = \frac{P(\phi)}{P(V)}$$

$$D_V(\phi|V) = \frac{2N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)} = \frac{N}{(\ln(N/2) - 1)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$(0 < N < (2/\sqrt{e})) \wedge (N > 2e)$$

$$Dom: \{(0; 2/\sqrt{e}) \cup (2e; +\infty)\}$$

La expresión (6) indica la cantidad mínima de intersecciones que tiene un determinado número par en N_V , el dominio de esta función está representado en la **Figura 18**.

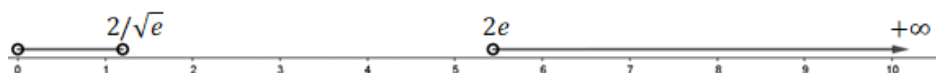


Figura 18. Dominio de la función D_V .

El único primo par (número 2), originará una intersección consigo mismo (número 4). En la **Figura 19**, se representa la distribución de los números que cumplen la conjetura de Goldbach. El intervalo $(0; 2/\sqrt{e})$ se desecha para este cálculo por obvias razones, y como se puede apreciar; todo $2N \geq 4$ cumple con la conjetura.

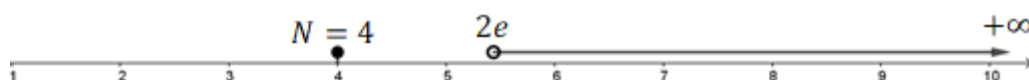


Figura 19. Distribución de números pares que cumplen la Conjetura de Goldbach.

Si a la expresión D_V se le aplica límite cuando $N \rightarrow \infty$, usando la regla de L'Hôpital, se obtendrá:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_V = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_V = +\infty$$

2.2. Análisis de las Funciones $f(N)$ y $g(N)$.

Para el presente análisis se considerará lo siguiente:

x_i , representa a la cantidad de primos existentes en el intervalo x .

y_i , la cantidad de primos existentes en el intervalo y .

En este punto x_i , así como y_i serán considerados como funciones de N ; desde $N > 2e$

$$f(N) = x_i; g(N) = y_i$$

Se realizará la suma de las funciones f y g (expresión 9):

$$\sigma(N) = f(N) + g(N)$$

$$\sigma(N) \approx \frac{N}{(2\ln(N/2) - 2)} + \frac{N}{(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\sigma(N) \approx \frac{4N \ln(N/2) - N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)} \quad (9)$$

A continuación, la fórmula (10) indica la operación resta entre f y g :

$$\psi(N) = f(N) - g(N)$$

$$\psi(N) \approx \frac{N}{(2\ln(N/2) - 2)} - \frac{N}{(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\psi(N) \approx \frac{3N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)} \quad (10)$$

Se observa entonces que entre $D_V(\phi|V)$ y $\psi(N)$ existe una relación, la cual sería:

$$D_V(\phi|V) = \frac{2}{3}\psi(N) \quad (11)$$

En este caso, $2/3$ es una aproximación a la constante de Hardy and Littlewood $C_{\text{twin}} = 0.6601618158$ (Nazardonyavi, 2012). A continuación, en la **Figura 20** se representan de manera gráfica las funciones $f(N)$ y $g(N)$; en donde al eje de las abscisas le corresponde la secuencia de los números naturales (\mathbb{N}) y al de las ordenadas; la secuencia ordinal de los números primos.

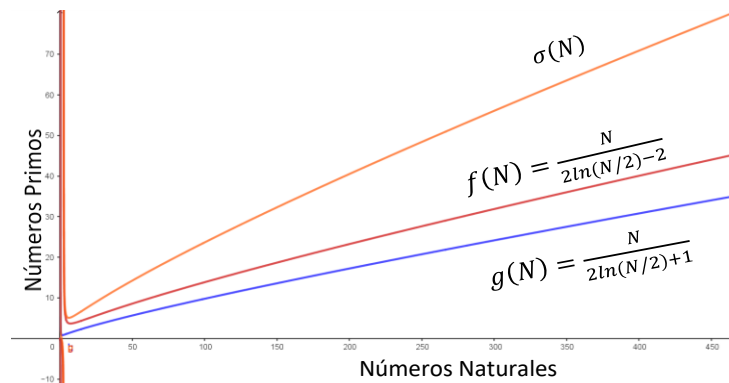


Figura 20. Funciones de N

A continuación, en la **Figura 21** de una forma más detallada se observa la forma de la función $\sigma(N)$, se aprecia que en el intervalo 0 a $f(N)$ no se forman los elementos que cumplen la conjetura de Goldbach, la formación de los mismos se da desde la función $f(N)$ hasta $\sigma(N)$. La función $g(N)$ posee una menor cantidad de elementos primos, por lo tanto, delimita la cantidad de intersecciones.

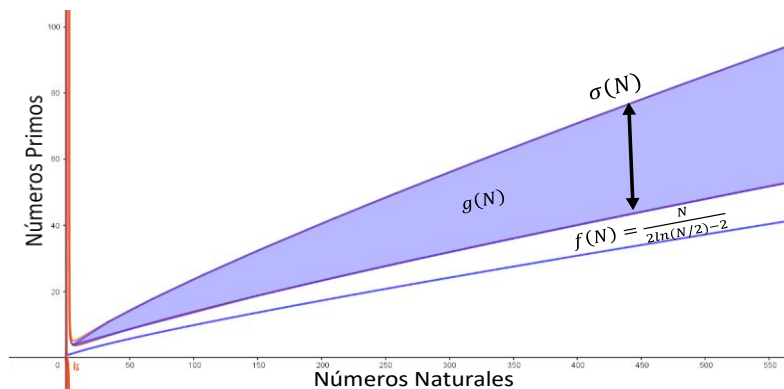


Figura 21. Análisis de las funciones f, g y σ

En este punto se puede hacer la siguiente observación: el área del cometa de Goldbach de la **Figura 22** siempre estará acotado desde la función $f(N)$ hasta $\sigma(N)$: $A_{\sigma} = \int_{2e}^{\infty} [\sigma(N) - f(N)] dN$.

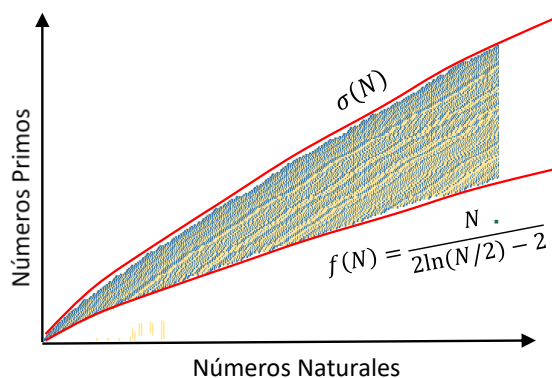


Figura 22. Cometa de Goldbach, relacionado con las funciones de N

En la **Figura 23** está representada el área equivalente a la función $\psi(N)$, la cual sería:

$$A_{\psi} = \int_{2e}^{\infty} [f(N) - g(N)] dN$$

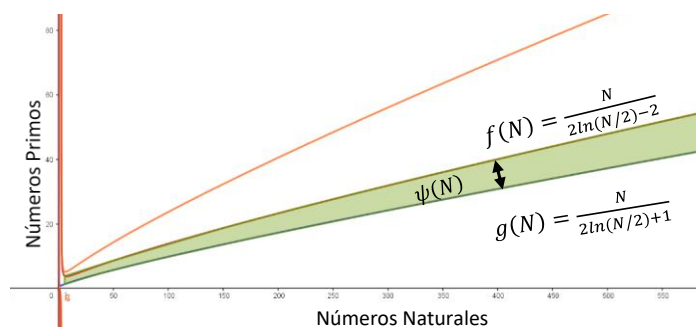


Figura 23. Gráfica del área de la función ψ

En la **Figura 24** se observa que a pesar de que la escala aumenta: siempre existirá un pequeño espacio entre la línea color azul y la de color rojo; es decir, el área que ocupa $A_{\psi} = \int_{2e}^{\infty} [\psi(N)] dN$. Esta región tiene relación con la probabilidad de intersección que tiene un determinado elemento N .

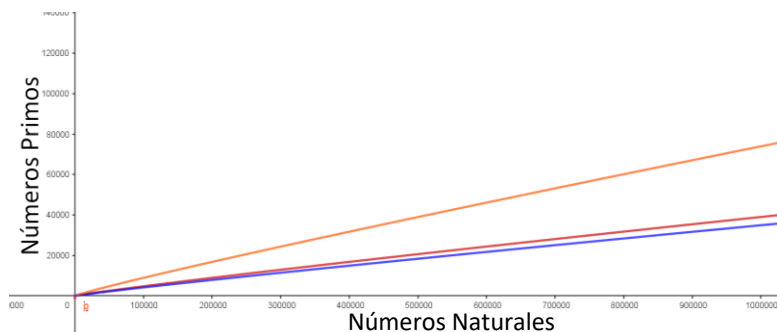


Figura 24. Gráfica de la función $f-g$ para números de orden 1×10^6

Ejemplo 4. En la **Figura 25** se analizará la distribución del número 2×10^5 mediante geogebra y se calculará la cantidad mínima de pares numéricos que hacen cumplir la conjetura para este número.

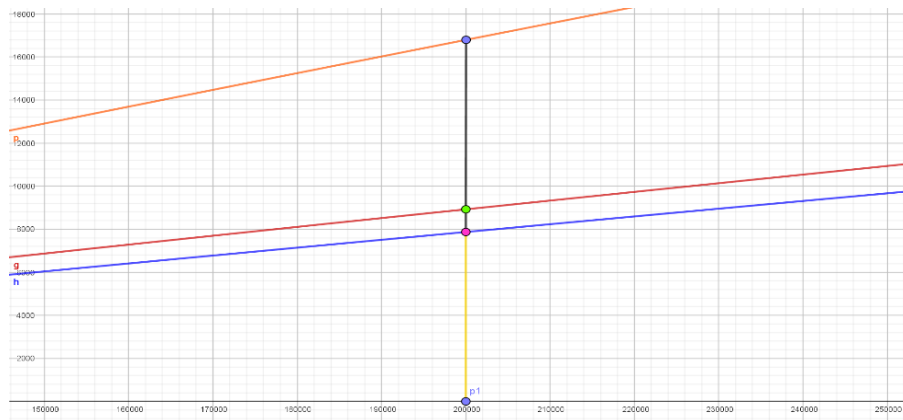


Figura 25. Gráfica de la función f-g para el número par 2×10^5

$$x_i \approx 9512.10$$

$$y_i \approx 8324.36$$

$$\psi(N) = x_i - y_i \approx 1187.73$$

$$D_V(\phi|V) = \frac{2}{3}(x_i - y_i) \approx 791.82$$

Para el número par 2×10^5 existe una cantidad mínima de 792 lugares aproximadamente en N vertical, en donde la unión de 2 números primos hace que se cumpla la conjetura.

Cabe recalcar, que este cálculo se verificó de manera analítica para este problema.

2.3. Teorema fundamental de números primos

Este teorema ya fue demostrado por D.J. Newman (Ramos, 2003), en este caso se analizará con la función $\sigma(N)$ la cual indica la cantidad de primos totales presentes para un determinado número de la secuencia \mathbb{N} .

$$\sigma(N) \approx \frac{4N \ln(N/2) - N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\pi \approx \sigma$$

$$\pi \approx \frac{4N \ln(N/2) - N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

La expresión $N/\ln(N/2)$ será el contador de primos para este caso, ya que " $x/\ln x$ no es numéricamente una buena aproximación de $\pi(x)$ " (Chamizo, 2011).

$$\pi \approx \frac{N}{\ln(N/2)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{[N/\ln(N/2)]} = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{4N \ln(N/2) - N}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}}{\frac{N}{\ln(N/2)}}$$

Se realizan las operaciones indicadas:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(N/2)(4N \ln(N/2) - N)}{N(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cancel{N} \ln(N/2)(4 \ln(N/2) - 1)}{\cancel{N}(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(4 \ln(N/2)^2 - \ln(N/2))}{(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(4 \ln(N/2)^2 - \ln(N/2))}{4 \ln(N/2)^2 - 2\ln(N/2) - 2}$$

Se hace un cambio de variable:

$$z = \ln(N/2)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4z^2 - 1}{[4z^2 - 2z - 2]}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{4z^2}{z^2} - \frac{1}{z^2}}{[\frac{4z^2}{z^2} - \frac{2z}{z^2} - \frac{2}{z^2}]}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{z^2}}{[4 - \frac{2}{z} - \frac{2}{z^2}]}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{\ln(N/2)^2}}{[4 - \frac{2}{\ln(N/2)} - \frac{2}{\ln(N/2)^2}]}$$

Se aplica límites y se considerará que si N crece a valores altos; el $\ln N$ también lo hará. Además, cualquier natural dividido por un número grande tiende a 0.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{4} = 1$$

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la **Figura 4** por medio de relaciones se encontraron las ternas pitagóricas de la forma: $(n; (n^2 - 1)/2; (n^2 + 1)/2)$ y $(4n; (n^2 - 4); (n^2 + 4))$ con n impar, también la de forma $(2n; n^2 - 1; n^2 + 1)$ para n par.

La **Figura 2** muestra en su borde inferior que la función que la genera tiene la forma de una curva logarítmica, esto no es algo novedoso, pues Gauss ya lo había descubierto. Posteriormente, luego de revisar muchos ejemplos con valores de números pares conocidos se modelan fórmulas, empleando la relación: $x/(A \cdot \ln(x) + B)$ usada por Legendre para calcular con mayor precisión los valores de la relación de Gauss $(x/\ln x)$, en donde se determina la cantidad de primos presentes hasta un determinado número natural N .

Cabe mencionar que los elementos del conjunto x y los del conjunto y ; señalados en la **Figura 10**, no tienen términos que sean iguales o que se intersecten en una relación de conjuntos, ya que como es conocido: cada número primo es único. La expresión (5) determina la probabilidad de contar con puntos equidistantes, en donde se intersectarán pares de números primos que harán cumplir la conjetura de Goldbach.

La expresión (9) $\sigma(N)$ indica la cantidad de primos existentes hasta un determinado número N , la aproximación que se le da en el presente trabajo al teorema de Gauss es $\pi \approx (4N \ln N - N) / [(2 \ln N - 2)(2 \ln N + 1)]$.

La expresión (10) $\psi(N)$ está relacionada con la expresión (6), $D_V(\phi|V)$ como se indica en la relación (11), esta última indica la cantidad de intersecciones mínimas que puede tener cualquier número par dentro de N vertical. Así mismo, la expresión (7) indica la cantidad máxima de intersecciones. De acuerdo al manuscrito: Método Gráfico de la Conjetura de Goldbach, existen números con mayor cantidad de intersecciones, como ocurre con los múltiplos de 5.

De acuerdo al análisis gráfico de Geogebra $\sigma(N) \approx N / \ln N - 1$. Además, se comprobó la cantidad de primos menores a 1×10^6 con un error del 0,28%. Para el presente trabajo no se pudo llegar a evaluar cantidades extremadamente altas, pues no se contaba con una

supercomputadora para realizar esta tarea, aun así, se pudo determinar por medio de las fórmulas (7) y (8) y corroborar con el graficador de Geogebra, que existe una gran precisión para conocer la cantidad de números primos que se encuentran dentro de un intervalo N determinado. La cantidad $\pi \approx N / \ln(N/2)$ es el contador de primos que se usa en el presente trabajo, pues su valor indica menos cantidad de error en comparación a $\pi \approx N / \ln N$.

Si se aplica límite cuando $N \rightarrow \infty$ en la expresión (5), y probabilidad de intersección en vertical $P(V)$, se obtendrá como resultado 0 en ambos términos: $\lim_{N \rightarrow \infty} D_V = \frac{P(\Phi)}{P(V)} = \frac{0}{0} = ind.$, lógicamente, cada vez que se avanza en la secuencia N hacia el infinito, decrece la cantidad de números primos. En la expresión: $D_V(\Phi|V) = 2N / [(2\ln(N/2) - 2)(2\ln(N/2) + 1)]$ se soluciona esta indeterminación al aplicar el límite cuando $N \rightarrow \infty$, se obtiene: ∞ . Así mismo, se obtiene este resultado de límite en las ecuaciones: (8), (9), (10), y (11). En los cálculos de las áreas de las funciones $\psi(N)$ y $\sigma(N)$ se encuentra presente la integral exponencial $Ei = \int_x^\infty \frac{e^x}{x} dx$, esto podría indicar que las funciones aquí encontradas son convergentes, las integrales de este tipo son de la forma: $Ei(x) = \gamma + \ln(x) - Ein(-x)$, donde según Abramowitz & Stegun (1964) $Ein(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k \cdot k!} \approx e^x / x \left[1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots \right] (x \rightarrow \infty)$, por lo tanto, hay series numéricas infinitas dentro de este cálculo. De acuerdo a la hipótesis de Riemann (Gracián, 2010) y la identidad de Euler (Gracián), análoga a ésta, se indica que existe una relación entre el conjunto de los \mathbb{N} y los números primos.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se constata que; $\{\forall N \in \mathbb{N} \wedge N' \in \mathbb{N} \exists (x_i, y_i) \in N': x_i + y_i = 2N; \text{ con } 2N \geq 4\}$ donde N' es el conjunto de los números primos, $2N$ el conjunto de los números pares, y x_i e y_i son elementos primos que se encuentran en puntos equidistantes al natural evaluado.

Con la función $\sigma(N)$ se deduce el teorema fundamental de números primos. Para $\sigma(N)$ los resultados fueron comparados hasta $N = 1 \times 10^6$, mediante el uso de tablas de números primos y Geogebra.

El área $\psi(N)$ de **Figura 23**, muestra que continuamente existen elementos primos a lo largo de la secuencia infinita de los números naturales (\mathbb{N}), esto se da porque hay una diferencia entre la cantidad de elementos primos en los intervalos x/y , de acuerdo a la expresión (11) $\psi(N)$ está relacionada con la cantidad mínima de intersecciones D_V , por lo tanto, siempre

habrá valores que harán cumplir la conjetura, además el valor $2/3=0.66666...$ es aproximado a C_{twin} . Esta función fue comprobada para $N = 2 \times 10^3$ con el uso de un cometa de Goldbach que posee 300 elementos primos.

5. REFERENCIAS

- Abramowitz, M. & Stegun, I. (1964). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical. Washington D.C, EEUU. Library of Congress.
- Cilleruelo, M.J. (2000). La demostración elemental del teorema de los números primos. Las matemáticas del siglo XX. Madrid, España. Nivola
- Chamizo, F. (2011). Ocho lecciones de teoría de números. Págs. 1-7 Recuperado el 21 de julio del 2018, de <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/lecc8.pdf>
- Deshouillers, J., Granville, A., Narkiewicz, W., & Pomerance, C. (1993). An Upper Bound in Goldbach's Problem. Mathematics of computation, 61 (203), 209-213.
- Du Sautoy, M. (2010). The Number Mysteries. (1st edition). Harper Collins, UK
- EduMates. (Marzo, 5 del 2010). Números primos [Archivo de video]. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=rK3zAViM1a8&feature=youtu.be>
- Giordano, P. (2010). La Soledad de los Números Primos. Madrid, España.
- Gracián, E (2010) Los números primos. Un largo camino al infinito. Madrid, España. RBA Libros.
- Helfgott, H. A. (2014). Major arcs for Goldbach's problem. Recuperado de [arXiv:1305.2897v4](https://arxiv.org/abs/1305.2897v4)
- Intriago, Y. (2018) Números Primos; Método gráfico de la conjetura de Goldbach. Revista Bases de la Ciencia. 3, (2), 79-97. Recuperado de <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/1449/1516>
- Markakis, E., Provatidis, C. & Markakis, N. (2013). An Exploration on Goldbach's Conjecture. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84 (1): 29-63.
- Mutafchiev, L. (2016) On the Distribution of the Number of Goldbach Partitions of a Randomly Chosen Positive Even Integer. Elsevier- Electronic Notes in Discrete Mathematics, 54, 3-8.
- Nazardonyavi, S. (2012). Some History about Twin Prime Conjecture. Recuperado de <http://arxiv.org/abs/1205.0774v1>, 1–26.
- Ramachandra, K. (1997). Two remarks in prime number theory. BULLETIN DE LA SOCIETE MATHEMATIQUE DE FRANCE, 105, 433 – 437.
- Ramos, J. (2003). El teorema de los números primos. Miscelánea Matemática, 38, 15–31.
- Salmeri, A. & Salmeri, M. (2002). L'ipotesi di Goldbach da una Congettura Statistica ad una Congettura Matematica. Dipartimento di Ingegneria Elettronica, Università di Roma. Atti del Congresso nazionale Mathesis.
- Sánchez J.M. (2011) Riemann y los Números Primos, Revista Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid. 1, (2). Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/index4_numero1.html
- YouTube. (Noviembre, 15 del 2017). Los números primos más grandes del mundo y ¡el enigma de los números perfectos! [Archivo de video]. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=BGryZFh1Wq8&feature=youtu.be>
- Zagier D. (1977). The first 50 million prime numbers. New Mathematical Intelligencer. 7-19 de <https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/BF03039306/fulltext.pdf>