Revista Bases de la Ciencia - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 5, No 1, Enero/Abril, 2020, Ecuador (p. 51-62). Edición continua.

Ciencias Matemáticas

Artículo de Investigación

RESULTADOS SOBRE OPERADORES LLENOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Edixo Rosales

Departamento de matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias. Maracaibo, Venezuela.
Autor para la correspondencia: edixorosales@gmail.com

Recibido: 5-03-2019 / Aceptado: 15-04-2020 / Publicación: 30-04-2020

Editor Académico: Miguel José Vivas-Cortez.

RESUMEN

Se prueba, entre otros, el siguiente resultado: Sea $T:H\to H$ un operador autoadjunto inyectivo, y $K:H\to H$ un operador de Riesz, tal que $K\in Alglat(T)\cap\{T\}'$. Si $K:H\to H$ es lleno, entonces $T:H\to H$ es lleno.
Palabras clave: Operador de Riesz, operador autoadjunto, operador lleno.

RESULTS ON FULL OPERATORS IN HILBERT SPACES

ABSTRACT

It is proved here, among other results, the following: Let $T:H\to H$ be a self-adjoint injective operator, and $K:H\to H$ a Riesz operator, such that $K\in Alglat(T)\cap\{T\}'$. If $K:H\to H$ is a full operator, then $T:H\to H$ is a full operator.
Keywords: Riesz operator, self-adjoint operator, full operator.

RESULTADOS SOBRE OPERADORES COMPLETOS EM ESPAÇOS DE HILBERT

RESUMO

O siguiente resultado, entre outros, está provado: Seja $T:H\to H$ um operador autoadjunto limitado abaixo, e $K:H\to H$ um operador de Riesz, tal qual $K\in AlglatT\cap\{T\}^\wedge'$. Se $K:H\to H$ é um operador completo, então $T:H\to H$ é um operador completo.
Palavras-chave: operador Riesz, operador autoadjunto completo.

Citación sugerida: Rosales, E. (2020). Resultados sobre operadores llenos en espacios de Hilbert. Revista Bases de la Ciencia, 5(1), 51-62. DOI: 10.33936/rev_bas_de_la_ciencia.v5i1.1686 Recuperado de: https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/1686

Orcid IDs:
Dr. Edixo Rosales: https://orcid.org/0000-0001-5764-928X
Dr. Miguel Vivas: https://orcid.org/0000-0002-1567-0264

1.-INTRODUCCIÓN

Este trabajo está motivado por un resultado dado en mi libro "Operadores llenos, casi llenos y de radio numérico alcanzable" $(\text{Rosales}, 2011)$. Este resultado dice explícitamente que, dado un operador $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ invertible, con $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach complejo y tal que todo $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{latT}$ es complementado en $\boldsymbol{X}$ a través de un invariante; si dado $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ un operador de Riesz lleno, tal que $\boldsymbol{A}$ conmuta con $\boldsymbol{T}$, y $\boldsymbol{A}$ contiene todos los invariantes de $\boldsymbol{T}$, entonces $\boldsymbol{T}$ es un operador lleno. Presentamos un caso, particularmente interesante, donde $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es un operador autoadjunto inyectivo definido sobre un espacio de Hilbert separable $\boldsymbol{H}$.

El segundo resultado en importancia de este trabajo, fue originalmente propuesto por el Doctor Jaime Bravo, en una investigación inédita. El matemático referido, plantea la interrogante: ¿Dado un operador $T: H \to H$, autoadjunto y acotado por abajo, y $K: H \to H$ un operador de Riesz, tal que $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$. Si $K: H \to H$ es lleno, entonces $T: H \to H$ es lleno?. Este teorema fue demostrado parcialmente en $[Edixo, 2011]$. Finalmente retomamos un corolario de Jaime Bravo dado en su tesis doctoral en la Universidad de Berkeley $("Bravo,\ 1980")$, y hacemos un análisis exhaustivo de su demostración, debido a que en él está contenida prácticamente la filosofía de la anterior interrogante.

Aunque se supone que, el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert, presentaremos unos preliminares de los resultados básicos que se usarán en el transcurso del trabajo. Las referencias $(Fernandez\ G.,\ 2015)$, $([Kreyszig,\ 1978],)$ y $(Schecter, 1971)$ pueden servir de guía para el mismo propósito.

Preliminares

Esencialmente se trabaja en este artículo en un espacio de Hilbert separable H sobre los números complejos, aunque algunos resultados valgan sin la propiedad de separabilidad. Un subespacio M de H se sobreentiende que es cerrado bajo la topología de la norma, y diremos que es invariante para un operador acotado $T: H \to H$, si $T(M) \subset M$. Se denota por $lat(T)$ la familia de sus subespacios invariantes por T. Si $M \in lat(A)$, para todo operador $A: H \to H$ talque $T \circ A = A \circ T$, se dice M es hiperinvariante para T. Los subespacios $\{T\}' = \{A: H \to H,\ tales\ que\ \ T \circ A = A \circ T\}$ y $AlglatT = \{A: H \to H,\ tales\ que\ lat\ T \subset lat\ A\}$ son importantes en este trabajo.

Un operador acotado $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es lleno, si $\overline{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{M})} = \boldsymbol{M}$, para todo $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{lat}(\boldsymbol{T})$. El rango numérico asociado al operador $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, es el subconjunto de los números complejos $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{T}) =$

$\{\langle \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}, \|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{1}\}$. Aquí $\langle \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle$ denota el producto escalar en el espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$. Diremos que $\boldsymbol{W_0}(\boldsymbol{T}) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}: \boldsymbol{existe} \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{H},\ \|\boldsymbol{x_n}\| = \mathbf{1},\ \langle \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_n}), \boldsymbol{x_n}\rangle \to \boldsymbol{\alpha},\ \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_n})\| \to \|\boldsymbol{T}\|\}$, es el rango numérico máximal del operador $\boldsymbol{T}$.

Dado $\alpha \in C$, se dice que $\alpha \in \rho(T)$, si el operador acotado $T - \alpha I$ es invertible. A $\rho(T)$ se le llama la resolvente de T, y a su complemento $\sigma(T) = C - \rho(T)$, el espectro de T. Es conocido que $\sigma(T)$ es un subconjunto no vacío y compacto de los números complejos con su topología usual. Es decir cerrado y acotado.

Particularmente $\boldsymbol{\sigma_p}(\boldsymbol{T}) = \{\boldsymbol{\alpha \epsilon C}: \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\alpha I}) \neq \{\mathbf{0}\}\}$ es un subconjunto del espectro de $\boldsymbol{T}$ de interés para nuestro estudio.Si $\boldsymbol{\alpha \epsilon \sigma_p}(\boldsymbol{T})$, entonces $\boldsymbol{\alpha}$es un valor propio del operador $\boldsymbol{T}$. Por $\boldsymbol{\rho_\infty}(\boldsymbol{T})$ se denota la componente conexo no acotada de la resolvente $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{T})$. El número real no negativo $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{T}) = \lim\limits_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \sqrt[n]{\|\boldsymbol{T^n}\|}$ es llamado el radio espectral de operador $\boldsymbol{T}$. Se tiene el siguiente importante resultado:

Lema 1 (Sarason): Si $T: H \to H$ es un operador acotado, valen las siguientes afirmaciones:

(1) Si λ_0 y λ_1 pertenecen a una misma componente de la resolvente $\rho(T)$, entonces $lat(T - \lambda_0 I)^{-1} = lat(T - \lambda_1 I)^{-1}$

(2) Si $\lambda \in \rho_\infty(T)$, entonces $lat(T - \lambda I)^{-1} = lat(T)$.

Demostración: Puede ser consultada en (Bravo, 1980).

Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$, las potencias$\boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x})$generan un subespacio cerrado, que denotaremos por $\bigvee_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x})$y que será fundamental en el desarrollo de este trabajo**.**

Varios tipos de operadores aparecen referidos en esta investigación. Un operador acotado $T: H \to H$ se dice que es compacto, si dada una sucesión acotada $\{x_n\} \subset H$ existen $y \in H$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tales que $T(x_{n_k}) \to y$, en la convergencia de la norma. Si $T: H \to H$es un operador acotado, se dice que es de Riesz, si tiene las siguientes propiedades fundamentales:

(1) Si $\alpha \in C, \alpha \neq 0$, entonces $N((T - \alpha I)^{\mathrm{n}} = \ker\,(T - \alpha I)^{\mathrm{n}}$ es de dimensión finita para todo $n \geq 1$.

(2) Si $\alpha \in C, \alpha \neq 0$, entonces $\mathrm{R}((T - \alpha I)^{\mathrm{n}}) = (T - \alpha I)^{\mathrm{n}}(\mathrm{H})$ es sub espacio cerrado dimensión finita para todo $n \geq 1$.

(3) Si $\{\alpha_n\} \subset \sigma_p(T)$ es una sucesión infinita y $\alpha_n \to \alpha$, entonces $\alpha = 0$.

Se sabe que todo operador compacto es de Riesz y que si $M \in lat(T)$, entonces el operador restringido $T_M = T|M$, es de Riesz. Además todo operador de Riesz $T: H \to H$ se escribe de la forma $T = A + K$ con $A: H \to H$ un operador casinilpotente (es decir $\sigma(A) = \{0\}$) y $K: H \to H$ un operador compacto. Recíprocamente, si $T = A + K$ con $A: H \to H$ un operador casinilpotente y $K: H \to H$ un operador compacto, entonces T es de Riesz.

Si $T: H \to H$ es un operador acotado, existe $T^*: H \to H$ un operador acotado, tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, para todo $x, y \in H$. A T^* se le llama el operador adjunto de T. Un operador acotado $T: H \to H$ es normal cuando $T \circ T^* = T^* \circ T$, y un caso particular de este tipo de operadores, lo constituyen los autoadjuntos, es decir aquellos tales que $T = T^*$. Un operador acotado $T: H \to H$ se llama una isometría, si $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in H$. Si además la isometría T es sobre, el operador se dice unitario. Un operador acotado $T: H \to H$ tal que $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, se le llama positivo y para este operador existe un único $\sqrt{T}: H \to H$, tal que $\sqrt{T}^2 = T$. El operador $\sqrt{T}$ es la raíz cuadrada del operador T.

Recordemos que si M, N son subespacios de H, entonces $M \ominus \mathrm{N} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{M}: \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0, \forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{N}\}$.

Finalizamos diciendo que, algunos resultados conocidos sobre operadores llenos los damos para hacer auto contenida la exposición y se especificará el resultado que nos pertenece.

2.-RESULTADOS SOBRE OPERADORES LLENOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Si $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es un operador lleno, entonces $\boldsymbol{T}$ es inyectivo. En efecto, considere $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{T})$. Es claro que $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{T}) \in \boldsymbol{lat}(\boldsymbol{T})$ y por lo tanto $\overline{\boldsymbol{T}(\mathbf{ker}\,(\boldsymbol{T}))} = \{\mathbf{0}\} = \mathbf{ker}\,(\boldsymbol{T})$.

La primera importante caracterización de los operadores llenos que presentamos es la siguiente**:**

Teorema 1: Sea $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ un operador acotado. $\boldsymbol{T}$ es un operador lleno, si y sólo si, dado $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ tal que $\langle \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle = \mathbf{0}$ (para todo $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$), entonces $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Demostración: Suponga que $\boldsymbol{T}$ es un operador lleno y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$**,** tal que $\langle \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle = \mathbf{0}$ (para todo $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$). Si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, considere $\boldsymbol{M} = \bigvee_{\boldsymbol{n}=\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x})$ (el subespacio cerrado generado por las potencias $\boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x})$**).** Como $\overline{\boldsymbol{T}(\bigvee_{\boldsymbol{n}=\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x}))} = \bigvee_{\boldsymbol{n}=\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x}) \subset \bigvee_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{+\infty} \boldsymbol{T^n}(\boldsymbol{x})$, se tiene que existe una red de polinomios $\boldsymbol{P_i}(\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{x}$ en norma, donde cada polinomio $\boldsymbol{P_i}$ es sin términos independientes. Se deduce que $\langle \boldsymbol{P_i}(\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle \to \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \Longrightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \mathbf{0}$, lo que es contradictorio.

Recíprocamente, si $\boldsymbol{T}$ no fuera lleno, existiría un $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{lat(T)}$ tal que $\mathrm{M} \ominus \overline{\boldsymbol{T(M)}} \neq \{\mathbf{0}\}$. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \ominus \overline{\boldsymbol{T(M)}}$ con $\|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{1}$. Como $\langle \boldsymbol{T^n(x), x} \rangle = \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, por hipótesis tenemos que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, lo que es una contradicción.

Observe de lo anterior, que si $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es un operador acotado con $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{W(T)}$, entonces $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es lleno. En efecto, de lo contrario existen $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{lat(T)}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \ominus \overline{\boldsymbol{T(M)}}$, $\|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{1}$, luego $\langle \boldsymbol{T(x), x} \rangle = \mathbf{0}$lo que es contradictorio.

Tenemos el siguiente resultado que nos pertenece:

Teorema 2: Si $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ es una isometría y $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{W_0(T)}$, entonces $\boldsymbol{T}$ es un operador lleno**.**

Demostración: Si $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ no es lleno, existe un vector $x \in H, \|x\| = 1$ tal que $\langle T^n(x), x \rangle = 0$ para todo $n \geq 1$ por el teorema 1.

Denote por $T^n(x) = x_n$. Por ser$\boldsymbol{T}$ una isometría, se tiene que $\|T^n(x)\| = \|x\| = 1$.

Esto dice que los x_n son vectores unitarios. Además se deduce que $\|T^n(x)\| = 1 \to \|T\| = 1$.

Observe que $\langle T(x_n), x_n \rangle = \langle T(T^n(x)), x) \rangle = \langle T^{n+1}(x), x \rangle = 0$ (para todo $n \geq 1$). Esto afirma que $\mathbf{0} \in \boldsymbol{W_0(T)}$lo que contradice la hipótesis del teorema.

El siguiente resultado es fundamental en esta sección y aparece originalmente en $(Karanasios,$ 1984)**.**

Teorema 3 (Karanasios): Sea $T: H \to H$ un operador casi nilpotente lleno. Si $N, M \in lat(T)$ con $\{0\} \subsetneq M \subsetneq N$, entonces el espacio cociente $\frac{N}{M}$es de dimensión distinta de uno.

Demostración: Sabemos que $\frac{N}{M}$ es isomorfo al subespacio cerrado $N \ominus M$**.**

Si $dim(N \ominus M) = 1$, entonces $N = M \oplus (N \ominus M) = M \oplus \langle x \rangle$ donde $\langle x \rangle$ indica el subespacio cerrado generado por $x \in N \ominus M, \|x\| = 1$.

Existen $\alpha \in \mathbb{C}, y \in M$, tales que $T(x) = y \oplus \alpha x \Longrightarrow (T - \alpha I)(x) \in M$.

Si $\alpha = 0$, tenemos que $T(x) \in M$ y por lo tanto $\overline{\boldsymbol{T(N)}} = \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M}$ **.** Así que $N = M$, lo que es contradictorio.

Si $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, entonces $\boldsymbol{T^n(x) = y_n \oplus \alpha^n x \Longrightarrow \langle T^n(x), x\rangle = \alpha^n \Longrightarrow |\alpha|^n \leq \|T^n\| \Longrightarrow |\alpha| \leq \sqrt[n]{\|T^n\|} \Longrightarrow}$ $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0,}$ lo que es nuevamente contradictorio. Se deduce el resultado.

Se tiene el siguiente lema, lo introducimos porque facilita la demostración de nuestros resultados:

Lema 2 : Si $T: H \to H$ es un operador acotado y existe un vector $x \in H, \|x\| = 1$ tal que $\langle T^n(x), x\rangle = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces el subespacio cerrado $\left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right) \ominus \overline{T\left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right)}$es de dimensión uno**.**

Demostración: Es claro que $x \in \left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right) \ominus \overline{T\left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right)}$**.**

Sea $y \in \left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right) \ominus \overline{T\left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right)}$, existe una red de polinomios $P_i(T)(x) \to y$, en norma.

Se tiene que $\langle P_i(T)(x), x\rangle = P_i(0)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = P_i(0) \to \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$**.**

Definamos los polinomios$Q_i = P_i - P_i(0)$ (polinomios sin términos independientes).

Se tiene que $Q_i(\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} \in \overline{T\left(\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)\right)}$ **.** Por lo tanto$\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$**.** De lo que se deduce que $w = 0$. Es decir $y = \langle y, x\rangle x$.

Se sigue el resultado:

Corolario 1: Sea $T: H \to H$ un operador acotado. Si $A \in Aglat(T)$ es un operador lleno y casinilpotente, entonces T es un operador lleno.

Demostración: Si $T: H \to H$ no es lleno, existe un vector unitario $x \in H, \|x\| = 1$ tal que $\langle T^n(x), x\rangle = 0$ para todo $n \geq 1$.

Sea $M = \bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)$. Por el lema anterior

$dim \frac{M}{\overline{T(M)}} = \dim\left(M \ominus \overline{T(M)}\right) = 1$**.**

Como $M, \overline{T(M)} \in lat(T)$, se tiene por hipótesis que $M, \overline{T(M)} \in lat(A)$, lo que contradice el teorema 3.

El siguiente es nuestro principal resultado

ISNN 2588-0764

Teorema 4: Sea $T: H \to H$es un operador autoadjunto inyectivo, y $K: H \to H$ un operador de Riesz, tal que $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$. Si $K: H \to H$ es lleno, entonces $T: H \to H$ es lleno.

Demostración: Si $T: H \to H$ no es lleno, existe un vector unitario $x \in H$ tal que $\langle T^n(x), x \rangle = 0$ (para todo $n \geq 1$).

Sea $M = \bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)$, se tiene que$dim \frac{M}{\overline{T(M)}} = \dim\,(M \ominus \overline{T(M)})$=1.

Consideremos la siguiente familia $F_T(M) = \{N \in lat(T):\ 0 \subsetneq N \subsetneq M con \overline{T(N)} = N\}$. Estudiemos dos casos para esta familia:

(1) $F_T(M) = \emptyset$.

Consideremos el operador restringido $K_M: M \to M$ definido por $K_M(x) = K(x)$.

Veamos que K_M es un operador casinilpotente. De lo contrario, existe $\alpha \in \sigma_T(K_M)$ y por lo tanto $N = \ker(K_M - \alpha I_M) \neq \{0\}$ es de dimensión finita (por ser $K_M$un operador de Riesz).

Por ser T inyectivo, $T \circ K = K \circ T$ y N de dimensión finita, deducimos que $\overline{T(N)} = T(N) = N$, luego $N \in F_T(M)$, lo que es contradictorio.

(2) $F_T(M) \neq \emptyset$. En este caso consideramos $L = \overline{\langle \cup_{N \in F_T} N \rangle}$ (subespacio cerrado generado por los $N \in F_T$).

Es claro que $L \in F_T(M)$ y es un elemento máximal de esta familia con respecto a la inclusión.

Se tiene que $M = L \oplus (M \ominus L)$. Como T es auto adjunto $L^\perp \in lat(T)$, de lo que se deduce que $M \ominus L \in lat(T)$.

Veamos que si $\{0\} \subsetneq N \subsetneq M \ominus L,\ N \in lat(T)$, entonces $\overline{T(N)} \subsetneq N$. De lo contrario $L \oplus N \in lat(T)$ y $\overline{T(L \oplus N)} = \overline{T(L) \oplus T(N)} = \overline{T((L)} \oplus \overline{T(N)} = L \oplus N$ lo que contradice la máximalidad de L.

Se tiene por lo tanto que $T_{M \ominus L}: M \ominus L \to M \ominus L$ es auto adjunto inyectivo, $K_{M \ominus L}: M \ominus L \to M \ominus L$ es de Riesz lleno y $F_{M \ominus L}(M \ominus L) = \emptyset$.

Se aplica la primera parte para demostrar que $T_{M \ominus L}$ es un operador lleno y por lo tanto obtenemos una contradicción.

Finalizamos este trabajo con dos importantes resultados. El primero es una generalización de un teorema dado en $(Bravo, 1980)$, y el segundo un desarrollo exhaustivo de uno dado en $(Rosales,\ 2011)$.

Teorema 5: Sea $T: H \to H$ un operador acotado invertible y existen $U: H \to H$ operador unitario y $K: H \to H$ operador compacto, tal que la perturbación compacta $U + K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ es un operador no escalar y lleno, $\|U + K\| = 1$ y $\sigma(U) \subsetneq S = \{x \in H: \|x\| = 1\}$. Si $lat(T)$ es no trivial, entonces $lat\ (T) \cap lat(T^{-1})$ es no trivial.

Demostración: Si $\sigma_p(U + K) \neq \emptyset$, es claro que dado $\alpha \in \sigma_p(U + K)$, $N = \ker\,(U + K - \alpha I) \in lat\ (T) \cap lat(T^{-1})$ con $N \neq \{0\}, H$.

Supondremos por lo tanto que $\sigma_p(U + K) = \emptyset$ y U es un operador unitario no escalar.

Si $T: H \to H$ no es lleno, existen $M \in lat(T)$, $e_n \in T^n(M), \|e_n\| = 1$ tales que

$T^n M = \langle e_n \rangle \oplus T^{n+1} M, \langle e_n \rangle \perp T^{n+1}(M)$, para todo$n \geq 0$.

Por lo tanto

$T(e_n) = \alpha_n e_{n+1} \oplus x_{n+2} (x_{n+2} \in T^{n+2}(M)\ )$(*)

$(U + K)(e_n) = \beta_n e_n \oplus y_{n+1} (y_{\ n+1} \in T^{n+1}(M)\ )$(**)

Se deduce de la igualdad (*) y del hecho de ser T invertible que cada $\alpha_n \beta_{n+1} = \alpha_n \beta_n \Longrightarrow \beta_n = \beta_{n+1} = \beta$ para todo $n \geq 0$.

Vamos a demostrar que $\beta = 0$.

Notemos que $\langle ((U + K) - \beta I)^n (e_1), e_1 \rangle = 0$ para todo $n \geq 0$.

Es decir que $(U + K) - \beta I$ es un operador no lleno.

Por otro lado:

$$\|(U + K)(e_n)\|^2 = \|\beta e_n \oplus y_{n+1}\|^2 \Longrightarrow$$

$$1 + \|K(e_n)\|^2 + \langle U(e_n), K(e_n) \rangle + \langle K(e_n), U(e_n) \rangle$$

$= |\beta|^2 + \|y_{n+1}\|^2 \geq |\beta|^2$ (*).

Como la familia $\{e_n\}$ es ortonormal y K es un operador compacto, tenemos que $K(e_n) \to 0$ en norma y por lo tanto $\|K(e_n)\|^2, \langle U(e_n), K(e_n)\rangle, \langle K(e_n), U(e_n)\rangle \to 0$. Pasando al límite en (*) obtenemos que $|\beta| \leq 1$.

Si $|\beta| < 1$, como $\sigma(U+K) \subset \sigma(A)$ (ver referencia $(Halmos,\ 1982,\ problem\ 182)$), tenemos que $\beta \in \rho_\infty(U+K)$ y por lo tanto se deduce que, $lat((U+K)-\beta I))^{-1}) = lat(U+K)$ lo que dice que el operador $(U+K)-\beta I$ es lleno, lo que es una contradicción. Esto dice que $|\beta| = 1$ y como $\|U+K\| = 1$, luego $(U+K)e_n = \beta e_n$ para todo $n \geq 0$, lo que es nuevamente contradictorio, ya que hemos supuesto que $\sigma_p(U+K) = \emptyset$.

Si Ues unitario escalar, luego existe $\gamma \in C, |\gamma| = 1$, tal que $U = \gamma I$. Como $(\gamma I + K) \circ T = T \circ (\gamma I + K) \Longrightarrow K \circ T = T \circ K$, se deduce por $(Kubrusly, page\ 133)$ que, T tiene subespacios hiperinvariantes y como $T^{-1} \in \{T\}'$ el resultado se sigue.

Corolario 2: Sea $T: H \to H$ un operador acotado invertible y existen $R: H \to H$ operador acotado tal que $R \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ es un operador no escalar y $(R+R^*) \geq 0$ compacto. Si $lat(T)$ es no trivial, entonces $lat\ (T) \cap lat(T^{-1})$ es no trivial.

Demostración: Suponemos sin pérdida de generalidad que $\|R\| < 1$.

Si $\sigma_p(R) \neq \emptyset$ y $\alpha \in \sigma_p(R)$ es claro que $N = \ker\ (N - \alpha I) \in lat\ (T) \cap lat(T^{-1})$. Suponemos por lo tanto que $\sigma_p(R) = \emptyset$.

Como $\|R\| < 1$, tenemos que $-1 \notin \sigma(R)$ ya que $r(T) = sup\{|\alpha|: \alpha \in \sigma(T)\}$y por lo tanto podemos definir el operador acotado $A = (R-I) \circ (R+I)^{-1}$, el cual es claramente inyectivo.

Veamos que $\|A\| \leq 1$. En efecto:

$\|(R-I) \circ (R+I)^{-1}(x)\|^2 = \|R((R+I)^{-1}(x))\|^2 + \|(R+I)^{-1}(x)\|^2 -$

$\langle (R+R^*)\big((R+I)^{-1}(x)\big), (R+I)^{-1}(x)\rangle$

$$\leq \left\|R\big((R+I)^{-1}(x)\big)\right\|^2 + \|(R+I)^{-1}(x)\|^2$$
$$+ \langle (R+R^*)\big((R+I)^{-1}(x)\big), (R+I)^{-1}(x)\rangle =$$

$\|(R+I) \circ (R+I)^{-1}(x)\|^2 = \|x\|^2$, de lo que se deduce lo afirmado.

Por otro lado como $(R+I)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n R^n$, se deduce que $A \in Alglat(T) \cap \{T\}'$.

De un cálculo directo se deduce que $A = (R - I) \circ (R + I)^{-1} = (R - I) \circ (\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n R^n) = I - 2(R + I)^{-1}$ y por lo tanto $1 \notin \sigma(A)$ y A no puede ser un operador escalar. En efecto $A - I = -2(R + I)^{-1}$ (*) es un operador invertible. Por otro lado si $A = \alpha I$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, se deduce que $(R + I)^{-1} = \frac{(1-\alpha)}{2} I$ (**). Usando (*) y (**) deduciríamos que R es realmente un operador escalar, lo que contradice la hipótesis del corolario 2.

Usando el hecho de que $I - A^*A = I - (I - 2(R + I)^{-1})(I - 2(R^* + I)^{-1}) = 2(R^* + I)^{-1}(R + R^*)(R + I)^{-1} = I - AA^*$ llegamos a que el operador $I - A^*A$ es compacto y que $AA^* = A^*A$, es decir A es un operador normal.

Como A es inyectivo y normal, tenemos que $\ker(A) = \ker(A^*) = \{0\}$, deducimos que $\overline{R(A)} = \ker(A^*)^{\perp} = \boldsymbol{H},$ luego por la descomposición polar de A, existe un operador unitario U tal que $A = U\sqrt{A^*A}$. Se tiene que $I - A^*A = \left(I - \sqrt{A^*A}\right)(I + \sqrt{A^*A})$ es compacto

Probemos que $\|A\| = 1$. En efecto, si $\|A\| < 1$, se tiene que $\left\|\sqrt{A^*A}\right\| = \sqrt{\|A^*A\|} = \|A\| < 1$, y por lo tanto se deduce que, los operadores $I - \sqrt{A^*A},\ I + \sqrt{A^*A}$ son invertibles, lo que contradice la compacidad de $I - A^*A$.

Veamos que $I + \sqrt{A^*A}$ es acotado por abajo, en efecto

$\left\|(I + \sqrt{A^*A})(x)\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|(\sqrt{A^*A})(x)\right\|^2 + 2\langle (A^*A)(x), x\rangle \geq \|x\|^2$. Como $I + A^*A$ es auto adjunto, se concluye que $I + \sqrt{A^*A}$ es un operador invertible.

De los razonamientos previos obtenemos que $(I - \sqrt{A^*A})$ es un operador compacto, luego podemos escribir $A = U + U\left(\sqrt{A^*A} - I\right) = \mathrm{U} + \mathrm{K}$ con U unitario y $K = U\left(\sqrt{A^*A} - I\right)$ compacto.

Si $\sigma_p(U + K) \neq \emptyset$, es claro que existe $N \in lat\ (T) \cap lat(T^{-1})$, con $N \neq \{0\}, H$.

De lo contrario $\sigma(A) \subsetneq S$. Sólo falta demostrar que Aes un operador lleno. Por Sarason tenemos que $lat(A - I)^{-1} = lat(A^{-1}) = lat\ (A)$, lo que asegura lo afirmado. Se termina aplicando el teorema 5.

3. COMENTARIOS FINALES

Nuestro resultado principal es un caso particular de un problema que enseguida anunciaremos:

Sea $T: H \to H$es un operador acotado por abajo, y $K: H \to H$ un operador de Riesz, tal que $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$. Si $K: H \to H$ es lleno, entonces $T: H \to H$ es lleno.

Realmente el teorema anterior se puede estudiar para operadores acotados sobre espacios de Banach uniformemente convexos y es lo que ocupa parte de nuestras actuales investigaciones. El problema ha sido estudiado parcialmente por el profesor Wilson Pacheco $(Pacheco, 2013)$.

4. REFERENCIAS

Bravo J. (1980). Relations between $\boldsymbol{latT}$,$\mathbf{-1}$,$\boldsymbol{latT2}$and operators with compact imaginary parts. Ph.D. Dissertation. U.C. Berkeley.

Fernandez G., Carlos (2015). "Introducción a los Espacios de Hilbert, Operadores y espectros. UNED.

Halmos P. R. (1982). A Hilbert Space Problem Book. Springer Verlag. Second Edition. New York.

Karanasios, S. (1984). Full operators and approximation of inverses. J. London Math. Soc. 30, 295-304.

Kubrusly, C. (2008). Hilbert Space Operators. A Problem Solvind Approach. Birkhauser. Boston.

Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York.

Pacheco, W. Carolina, C. (2009). Operadores llenos y aproximación del inverso en espacios de Hilbert. Revista Ciencia. 21 (4), 216-223.

Rosales, E. (2011). Operadores Casi Llenos y de Radio Numérico Alcanzable. Ediciones del Vicerrectorado Académico de la Universidad del Zulia.

Schecter, M. (1971). Principles of Functional Analysis. Academic Press, INC. New York.