Revista Bases de la Ciencia - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 5, No. 2, Mayo/Agosto, 2020, Ecuador (p. 59-69). Edición continua

Ciencias Matemáticas

Artículo de Investigación

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RESUMACIÓN DE BOREL EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE EULER

Oswaldo José Larreal Barreto

Departamento de Matemáticas y Estadísticas, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí.
Autor para correspondencia: olarreal@utm.edu.ec

Recibido: 26-4-2019 / Aceptado: 24-7-2020 / Publicación: 31-8-2020

Editor Académico: Michel Enrique Gamboa Graus

RESUMEN

El propósito de este artículo es mostrar que a partir de la series divergentes se puede obtener información relevante que permite resolver algunos problemas, para lograr este cometido, inicialmente se hace una breve introducción a la teoría resurgente de Écalle, se establecen las definiciones básicas como: resumación de Borel, serie clase Gevrey-1 e introducimos las herramientas necesarias, entre ellas la transformada de Borel y Laplace, además se hace un esquema de los pasos que se deben seguir para usar el método de resumación de Borel. Se muestra como ejemplo la ecuación diferencial de Euler, de la cual se halla una solución en forma de serie formal divergente. Siguiendo el esquema del método se debe calcular en primer lugar la transformada de Borel y asociar esta con una función que es analítica en un dominio, para así definir el dominio de la transformada de Laplace y obtener por extensión analítica las soluciones al problema inicial. Luego de este procedimiento las soluciones al problema inicial no deben estar dado por una serie divergente y en su lugar puede ser representado por integrales con caminos distintos, esto último puede permitir establecer relaciones entre las soluciones.

Palabras clave: resumación de Borel, ecuación diferencial de Euler, series divergentes.

APPLICATION OF BOREL'S SUMMARIZATION METHOD IN EULER'S DIFFERENTIAL EQUATION

ABSTRACT

The purpose of this article is to show that from the divergent series it is possible to obtain relevant information that allows solving some problems, to achieve this task, initially a brief introduction to the resurgent theory of Écalle is made, the basic definitions are established such as: Borel summarization, Gevrey-1 class series and we introduce the necessary tools, among them the Borel and Laplace transform, we also outline the steps that must be followed to use the Borel summarization method. Euler's differential equation is shown as an example, of which a solution is found in the form of a divergent formal series. Following the scheme of the method, the Borel transform must first be calculated and associated with a function that is analytic in a domain, in order to define the domain of the Laplace transform and obtain by analytical extension the solutions to the initial problem. After this procedure, the solutions to the initial problem should not be given by a divergent series and instead can be represented by integrals with different paths, the latter can allow establishing relationships between the solutions.

Keywords: Borel's summary, Euler differential equation, series divergent.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SUMARIZAÇÃO DE BOREL NA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE EULER

RESUMO

O objetivo deste artigo é mostrar que a partir das séries divergentes é possível obter informações relevantes que permitam resolver alguns problemas, para cumprir esta tarefa, inicialmente é feita uma breve introdução à teoria ressurgente de Écalle, as definições básicas são estabelecidas como: Sumarização de Borel, série de classes Gevrey-1 e apresentamos as ferramentas necessárias, entre elas a transformada de Borel e Laplace, também delineamos os passos que devem ser seguidos para usar o método de sumarização de Borel. A equação diferencial de Euler é mostrada como um exemplo, cuja solução é encontrada na forma de uma série formal divergente. Seguindo o esquema do método, a transformada de Borel deve primeiro ser calculada e associada a uma função analítica em um domínio, a fim de definir o domínio da transformada de Laplace e obter por extensão analítica as soluções para o problema inicial. Após esse procedimento, as soluções para o problema inicial não devem ser dadas por uma série divergente, mas podem ser representadas por integrais com caminhos diferentes, podendo esta última permitir estabelecer relações entre as soluções.

Palavras chave: resumo de Borel, equação diferencial de Euler, séries divergentes.

Citación sugerida: Larreal, O. (2020). Aplicación del método de resumación de Borel en la ecuación diferencial de Euler. Revista Bases de la Ciencia, 5(2), 59 - 69. DOI: 10.33936/rev_bas_de_la_ciencia.v %vi %i.1740 Recuperado de:
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/1740

Orcid IDs:

Dr. Oswaldo José Larreal Barreto: https://orcid.org/0000-0001-7604-7030

Dr. Michel Enrique Gamboa Graus: https://orcid.org/0000-0003-3704-9927

1. INTRODUCCIÓN

La idea central de este trabajo es el tratamiento de ciertas series de potencia divergentes. Como una primera parte se introduce la definición de límite generalizado de una sucesión. Se hace un bosquejo de la idea propuesta por *Félix Édouard Justin Émile Borel*, para luego mostrar la definición formal de suma generalizada. Se estructura el procedimiento que se debe considerar frente a una serie divergente, en el mismo se define la transformada formal de Borel a lo largo de una dirección arbitraria del plano complejo.
Por último se muestra el método de resumación de Borel en la solución formal de la ecuación diferencial de Euler.
Como referencia principal se usan los libros Candelpergher *et al.* (1993), Mitschi y Sauzin (2016), sin embargo se debe tener también a la mano los artículos Baldomá y Seara (2008), Seara y Sauzin (2003), Olivé *et al.* (2003), Martin *et al.* (2011), y las tesis doctorales Olivé (2006), Larreal (2011).

Resumación de Borel

Si se consideran las sucesiones $\{v_n\}$ y $\{p_n\}$ de números complejos y reales positivos, respectivamente y se define la sucesión de medias ponderadas por:

$$w_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i v_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i} \tag{1}$$

Una pregunta natural que se puede formular es: ¿bajo qué condiciones convergen w_n?.

Borel para resolver este problema, propuso dar más importancia en la suma (1) que a los términos con n más grande. Para esto tomó un parámetro $\lambda > 0$ y definió a los $p_n = \lambda^n/n!$. Se observa que con esta definición, los pesos más grandes corresponde a: $n \approx \lambda$, por lo tanto, haciendo λ cada vez más grande se obtiene el efecto deseado. Ahora teniendo en cuenta que $\sum_{i=0} p_n \rightarrow e^{\lambda}$, el límite generalizado será, para cada valor de λ, $e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n/n! v_n$. Consiguiendo de esta manera dar más importancia a los términos con la n más grande.
Así de esta forma se define el límite generalizado como:

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}v_n. \tag{2}$$

Se puede observar que si v_n converge a v, entonces el límite generalizado de Borel converge a v. Es de esperar, sin embargo, que este límite pueda existir también para sucesiones no convergentes. Este es el motivo principal por el que se usa esta herramienta en nuestro problema.
Por ejemplo, la sucesión $v_n = z^n$, tiene límite cero si $|z| < 1$, tiene límite 1, si $z = 1$, y no es convergente si $|z| > 1$. Pero $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n/n! z^n = e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, por tanto el límite generalizado de Borel será:

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}e^{\lambda z} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda(1-z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } \Re(z) < 1 \\ 1, & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Fijémonos, que el límite generalizado de Borel ha permitido extender la definición de límite de la sucesión v_n fuera del disco unidad, concretamente en el semiplano complejo $\Re(z) < 1$, conservando los valores del límite clásico en los casos que la sucesión ya convergía. El método de resumación de Borel de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ consiste en aplicar el límite generalizado de Borel a sus sumas parciales $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$, con $S_0 = 0$.

Se define

$$\mathbf{S}(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} S_n$$

Se puede obtener una expresión más útil si se supone que $\mathbf{S}(\lambda)$ está bien definida para todo $\lambda > 0$, y calcular su derivada:

$$\mathbf{S}'(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (S_{n+1} - S_n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n.$$

Usando que $\mathbf{S}(0) = S_0 = 0$, se obtiene $\mathbf{S}(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n \mathrm{d}\alpha$. Si ahora se hace tender λ a infinito se obtiene la definición de suma *generalizada de Borel*.

Definición 1. *Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, se dice **suma generalizada de Borel** o **resumación de Borel** de esta serie a:*

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n d\alpha$$

Para que tenga sentido la definición anterior se debe exigir que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n$ tiene un radio de convergencia no nulo y que además se pueda prolongar fuera de su disco de convergencia, a una función $f(\alpha)$ analítica en un entorno del origen, por otro lado también hay que exigir que tenga crecimiento exponencial.
En casos generales se trabaja con series de potencias de la forma:

$$\tilde{f} = \sum_{n=0} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

de clase Gevrey-1, en las cuales se va a aplicar el procedimiento que se explica más adelante para así poder hallar la resumada de Borel.

Definición 2. *Dada una serie de potencia $\sum_{n=0} \frac{a_n}{z^n}$, se dice que es de clase Gevrey-1 si existen dos constantes positivas $M > 0$, $\rho > 0$ tales que $|a_n| \leq M n! \rho^n$.*

Definición 3. *Se dice sector en una superficie de Riemann del logaritmo al conjunto*

$$S(\delta, \alpha, \rho) = \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ |\arg \xi - \alpha| < \delta/2 \text{ y } 0 < |\xi| < \rho\},$$

donde δ es un número real positivo, α es real y ρ puede ser un número real positivo o $+\infty$. También se denotar a $S(\delta, \alpha, +\infty)$ por $S_\delta(\alpha)$

Definición 4. *Dada una función $\hat{f}(\xi)$ analítica en un sector $S_\delta(\alpha) = \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ |\arg \xi - \alpha| < \delta/2\}$ para algún $\delta > 0$, se dice que tiene crecimiento exponencial τ, si existe una constante $C > 0$ tal que $|\hat{f}(\xi)| < Ce^{\tau|\xi|}$, $\forall \xi \in S_\delta(\alpha)$.*

Definición 5. *La* transformada de Borel formal *es la aplicación $\mathcal{B}\colon\ z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \to \mathbb{C}[[\xi]]$ definida por:*

$$\mathcal{B}\colon\ \tilde{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1} \mapsto \hat{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\xi^n}{n!}.$$

Donde $\mathbb{C}[[\xi]]$ denota el espacio de series formales con coeficientes en $\mathbb{C}$, es decir:

$$\mathbb{C}[[\xi]] = \left\{ \varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n, \text{ con } a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C} \right\}$$

Así

$$\mathbb{C}[[z^{-1}]] = \left\{ \varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{-n}, \text{ con } a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C} \right\}$$

El conjunto de series formales convergentes en ∞ lo se denota por $\mathbb{C}\{z^{-1}\}$. Las definiciones anteriores son usadas en Candelpergher *et al.* (1993) y Olivé *et al.* (2003).

Observación 1. *La aplicación $\mathcal{B}$ es un isomorfismo entre los espacios $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ y $\mathbb{C}[[\xi]]$.*

2. PASO A SEGUIR EN LA RESUMACIÓN DE BOREL

1. Como primer paso se debe calcular la transformada de Borel de la serie

$$\tilde{f} = \sum_{n=0} \frac{a_n}{z^{n+1}} \mapsto \mathcal{B}(\tilde{f}) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{n!}\xi^n.$$

2. Ahora si esta serie tiene un radio de convergencia $R > 0$ esto nos permite definir una función analítica $\hat{f}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{C}$ con $|\xi| < R$. Obsérvese que esto es una condición necesaria, ya que en caso contrario carecería de sentido definir la función $\hat{f}(\xi)$ y por supuesto este procedimiento no se puede aplicar.

3. Por otro lado si se observa θ, y si está bien definida la siguiente integral:

$$S_\theta(\tilde{f})(z) = L_\theta(\hat{f})(z) = \int_{C_\theta} e^{-z\xi}\hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

   con $C_\theta = \{\xi \ : \ \xi = r\, e^{\theta i},\ r > 0\}$.

   La cual se llama resumación de Borel en la dirección θ de $\hat{f}(\xi)$, esta definición es más general que la dada en 1. Se Observa que $S_\theta(\tilde{f})(z)$ es la transformada de Laplace de la función $\tilde{f}$ a lo largo del camino C_θ.

   Observación 2. *Para que esté bien definida la integral de $S_\theta(\tilde{f})(z)$ se necesita que:*

   a*)* *$\hat{f}(\xi)$ debe ser integrable en $C_\theta = \{\xi \ : \ \xi = r\, e^{\theta i},\ r > 0\}$. En particular $\hat{f}(\xi)$ debe tener singularidades en C_θ.*

   b*)* *Como se ha mencionado anteriormente, para impedir que la integral* (3) *tienda a ∞ se debe exigir que $\hat{f}$ al menos tenga crecimiento exponencial, por lo tanto deben existir dos números reales $c_1 > 0$ y τ tales que si $\arg\xi = \theta$ entonces $|\hat{f}(\xi)| < c_1 e^{\tau|\xi|}$. Así se obtiene que:*

$$|e^{-z\xi}\hat{f}(\xi)| < e^{-\Re(z\xi)}c_1 e^{\tau|\xi|} = c_1 e^{|\xi|\left(\tau - \Re(ze^{\theta i})\right)}$$

   y la integral será convergente para los $z \in \mathbb{C}$, tales que:

$$\tau - \Re(ze^{\theta i}) < 0$$

   Por lo tanto:

$$\Re(ze^{\theta i}) > \tau \tag{4}$$

   Visto $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, se obtiene que z y $e^{-\theta i}$ son vectores en $\mathbb{R}^2$ por lo tanto la ecuación (4) *se puede escribir como:*

$$(z; e^{-\theta i}) > \tau,$$

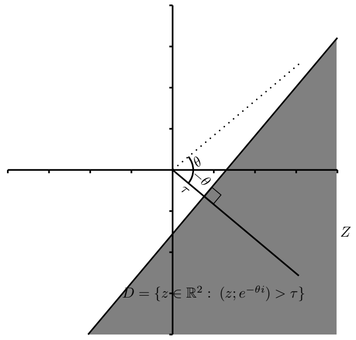


Figura 1. Representación del dominio $\mathcal{D}_\theta$ fijado θ.

donde $(\cdot\,;\cdot\,)$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$. Así se obtiene que el dominio de z debe ser, el semiplano:

$$\mathcal{D}_\theta = \{z \in \mathbb{R}^2 :\ (z; e^{-\theta i}) > \tau\}$$

Ver figura 1, en la cual se muestra una representación del dominio $\mathcal{D}_\theta$ fijado θ.
Ahora dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Si se varia $\arg \xi = \theta$ en un sector $\mathcal{S}_\alpha(\theta_0) = \{\xi :\ |\theta - \theta_0| < \frac{\alpha}{2}\}$, se obtiene que el dominio $\mathcal{D}^\alpha_{\theta_0}$ de los z correspondiente a todos los $\xi \in \mathcal{S}_\alpha(\theta_0)$ debe ser la unión de los planos $\mathcal{D}_\theta$ que están delimitados por las rectas $(z; e^{-\theta i}) = \tau$, ver figura 2, es decir:

$$\mathcal{D}^\alpha_{\theta_0} = \bigcup_{|\theta-\theta_0|<\frac{\alpha}{2}} \mathcal{D}_\theta$$

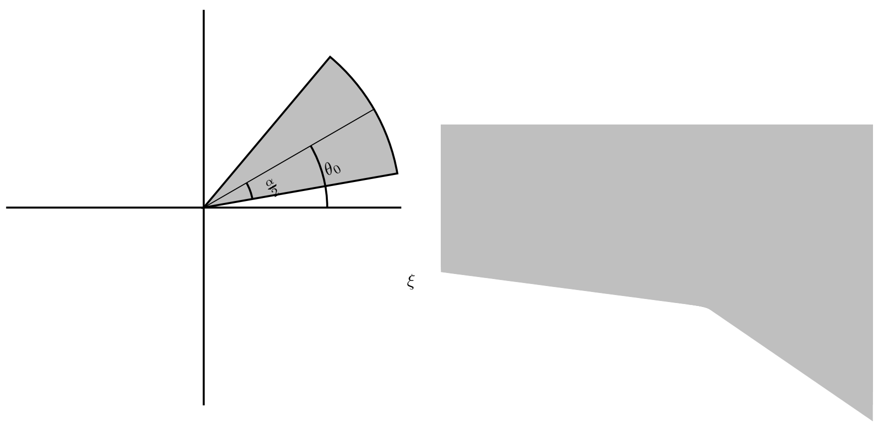


Figura 2. Izquierda sector $\mathcal{S}_\alpha(\theta_0)$. Derecha dominio $\mathcal{D}^\alpha_{\theta_0} = \bigcup_{|\theta-\theta_0|<\frac{\alpha}{2}} \mathcal{D}_\theta$ correspondiente al sector al sector $\mathcal{S}_\alpha(\theta_0)$.

En particular si el sector fuese $\mathcal{S}_{2\pi}(0)$ y si $\tau > 0$, el dominio $\mathcal{D}^{2\pi}_0$ en los complejos es el complemento del circulo centrado en el origen de radio τ (ver figura 3).

3. MÉTODO DE RESUMACIÓN DE BOREL APLICADO A LA ECUACIÓN DE EULER

Para ilustar la utilidad de la resumación de Borel, se considera un caso particular de la ecuación diferencial de Euler (5), los casos más genéricos se muestran en: Delkhosh (2012), Jung y Min (2009),Utoch-

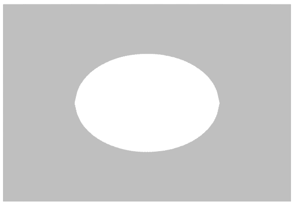


Figura 3. Dominio correspondiente al sector $\mathcal{S}_{2\pi}(0)$.

kina *et al.* (2014).

$$t^2y' + y = t. \tag{5}$$

Ahora haciendo el cambio el variable $t = \frac{1}{z}$, se obtiene que la ecuación anterior se puede escribir como:

$$Y'(z) - Y(z) = -\frac{1}{z} \tag{6}$$

Se puede observar que la serie (formal):

$$\tilde{Y}(z) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \tag{7}$$

es solución de la ecuación (6), pero además es una serie divergente de clase Gevrey-1.
Se desea en encontrar soluciones para la ecuación (6), usando el método de resumación de Borel en la serie (7). Además si existen varias soluciones se desea determinar algunas relaciones entre ellas.
Para poder aplicar el método de resumación de Borel es necesario seguir lo planteado en la sección 2, así se puede hallar la transformada de Borel a la serie (7), con lo cual se obtiene:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=0} (-1)^n \xi^n.$$

Esta serie converge a $\hat{Y}(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$ si $|\xi| < 1$, por lo tanto $\hat{Y}(\xi)$ representa la prolongación analítica de $\hat{f}(\xi)$, así esta puede ser resumada por Borel, casi para cualquier dirección θ excepto en la dirección que contenga $\xi = -1$, ya que allí no está definida la integral $S_\theta(\tilde{f})$. Por lo tanto se puede considerar la transformada de Laplace $S_\theta(\tilde{f})$ en la dirección $\xi = \theta$, con $0 \leq \theta < \pi$. Así se obtiene:

$$S_\theta(\tilde{Y}(z)) = Y^\theta(z) = \int_{C_\theta} e^{-z\xi} \frac{1}{1+\xi} \mathrm{d}\xi, \tag{8}$$

con $C_\theta = \{\xi \ : \ \xi = r\, e^{\theta i},\ r \geq 0\}$.
Se verifica que $\frac{1}{1+\xi}$ tiene crecimiento exponencial, para esto se puede comprobar que:

$$|1+\xi|^2 \geq g^2(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ |\sin(\theta)|^2 & \text{si } \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{1}{1+\xi}\right| \leq |g(\theta)|^{-1} \text{ si } \theta \neq \pi$$

Así se obtiene que dado $\varepsilon > 0$ y $\arg \xi \in [-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, se obtiene:

$$\left|\frac{1}{1+\xi}\right| \leq \max_{x \in [-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]} |g(x)|^{-1} = Ce^{0|\xi|}$$

Por lo tanto $\tau = 0$, y $S_\theta(\tilde{Y}(z))$ está bien definida y es analítica cuando $(z; e^{-\theta i}) > 0 \equiv \Re(z\xi) \geq 0$ es decir $S_\theta(\tilde{Y}(z))$ es analítica en el dominio

$$\mathcal{D}_\theta = \{z \ : \ (z; e^{-\theta i}) > 0\}$$

Ahora si se elige $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$, por el teorema de Cauchy las funciones $S_{\theta_1}(\tilde{Y}(z))$ y $S_{\theta_2}(\tilde{Y}(z))$, son extensiones una de la otra en los dominios $\mathcal{D}_{\theta_2}$ y $\mathcal{D}_{\theta_1}$ respectivamente, así se obtiene que se puede hacer una extensión de $S_{\theta_1}(\tilde{Y}(z))$ a $\mathcal{D}_{\theta_1} \cup \mathcal{D}_{\theta_2}$.

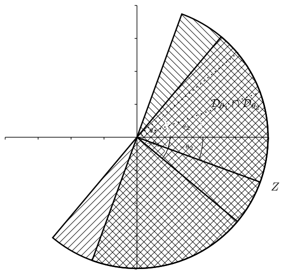


Figura 4. Intersección de los dominios correspondiente a θ_1 y θ_2.

Por ejemplo si se inicia fijando $\theta_0 = 0$, se obtiene una función $Y^0(z) = S_0(\tilde{Y}(z))$, definida en $\mathcal{D}_0 = \{z \ : \ \Re z > 0\}$. Ahora si se varia $\theta \in [0, \pi)$, se puede extender $Y^0(z)$ analíticamente, al dominio $\mathcal{D}^- = \bigcup_{\theta \in [0,\pi)} \mathcal{D}_\theta$.

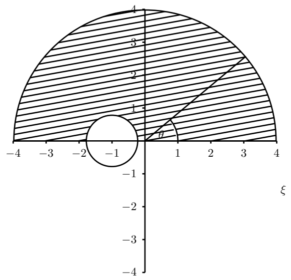


Figura 5. Camino de integración $\arg \xi = \theta$ con $0 < \theta < \pi$.

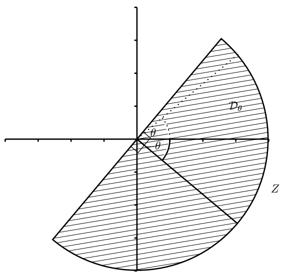


Figura 6. Plano $\mathcal{D}_\theta$.

Por otro lado como $\hat{Y}(\xi)$ tiene un polo en $\xi = -1$ por lo tanto $\theta = \arg \xi$ no puede ser igual a π en el integrando de la ecuación (8), sin embargo se puede definir por continuación analítica la resumada al semiplano de los complejos con parte real negativa tomando un camino que sigue el semi-eje negativo y que pasa por arriba de esta singularidad.
A este camino lo se denota por $O(\pi^-)$ (ver figura 8(a)).

Así se ha obtenido la prolongación analítica $Y^{-}(z)$ en el conjunto

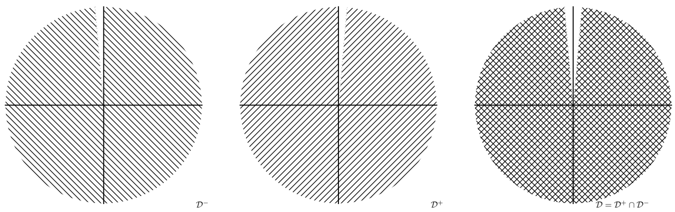
$$\mathcal{D}^{-} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ -3/2\pi < \arg z \leq \pi/2\}$$

La cual está definida de la siguiente manera:

$$Y^{-}(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi & \text{si } \Re(z) \geq 0 \\ Y^{\pi^-}(z) = \int_{O(\pi^-)} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi & \text{si } \Re(z) < 0 \end{cases}$$

De hecho, se puede comprobar que si se toma un subsector $\mathcal{S}_{2\pi-2\varepsilon}(-\frac{\pi}{2}) \subset \mathcal{D}^{-}$ (con $\varepsilon > 0$), $\tilde{Y}(z)$ es asintótica a $Y^{-}(z)$.
También se puede encontrar otra prolongación analítica $Y^{+}(z)$ si se elige $\theta \in (-\pi, 0]$. Con lo cual se define el camino $O(\pi^{+})$ de manera análoga (ver figura 8(b)) a la definición del camino $O(\pi^{-})$ solo que esta vez pasa por debajo de la singularidad $\xi = -1$. Y así se define $Y^{+}(z)$ de la siguiente manera:

$$Y^{+}(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi & \text{si } \Re(z) \geq 0 \\ Y^{\pi^+}(z) = \int_{O(\pi^+)} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi & \text{si } \Re(z) < 0 \end{cases}$$



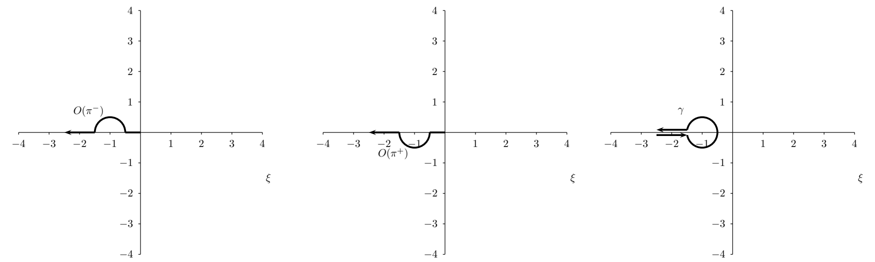
(a) Dominio $\mathcal{D}^{-}$. (b) Dominio $\mathcal{D}^{+}$. (c) Dominio $\mathcal{D}$.

Figura 7. Dominios $\mathcal{D}^{-}$, $\mathcal{D}^{+}$ y $\mathcal{D}$.

Por lo tanto cuando $\Re(z) < 0$ se obtiene que $Y^{0}(z)$ tienen dos prolongaciones analíticas distintas que son asintóticas a la serie $\tilde{Y}(z)$.
Por último se establecen relaciones entre ambas soluciones.
Por teorema del residuo se puede calcular $Y^{-}(z) - Y^{+}(z)$, (ver figura 8(c)) cuando $\Re z < 0$:

$$\begin{aligned} Y^{-}(z) - Y^{+}(z) &= Y^{\pi^-}(z) - Y^{\pi^+}(z) \\ &= \int_{O(\pi^-)} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi - \int_{O(\pi^+)} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\gamma = O(\pi^-)\cup -O(\pi^+)} e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= 2\pi i \ \text{Res}\left(e^{-z\xi}\frac{1}{1+\xi}\right)\Bigg|_{\xi=-1} \\ &= 2\pi i e^{z} \end{aligned}$$

Entre las aplicaciones de la resumación de Borel, cabe destacar la resolución de ecuaciones inner ver: Baldomá y Seara (2008), Martin *et al.* (2011), Simó y Vieiro (2009) más aún en aplicaciones concretas en los cálculos del acelerador de microtrón ver Larreal (2011).



(a) Camino de integración $O(\pi^-)$. (b) Camino de integración $O(\pi^+)$. (c) Camino de integración γ .

Figura 8. Caminos de integración de γ.

4. CONCLUSIONES

El método de resumación de Borel ofrece una alternativa para definir una función por prolongación analítica de una serie divergente, este método además ofrece la posibilidad de encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales que tienen soluciones en forma de series divergentes.

5. REFERENCIAS

Baldomá, I. y Seara, T. M. (2008). The inner equation for generic analytic unfoldings of the hopf-zero singularity. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 10(2-3):323–347.

Candelpergher, B., Nosmas, J.-C., y Pham, F. (1993). *Approche de la résurgence*. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris.

Delkhosh, M. (2012). A method for solving the special type of cauchy-euler differential equations and its algorithms in matlab. *Journal of Science*, 2(3):131.

Jung, S.-M. y Min, S. (2009). On approximate euler differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2009.

Larreal, O. J. (2011). *Cálculo de escisión de separatrices y regiones de estabilidad usando multiprecisión: el microtrón y la singularidad hopf-zero*. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

Martin, P., Sauzin, D., y Seara, T. M. (2011). Resurgence of inner solutions for perturbations of the mcmillan map. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 31.

Mitschi, C. y Sauzin, D. (2016). *Divergent Series, Summability and Resurgence I: Monodromy and Resurgence*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing.

Olivé, C. (2006). Càlcul de l' escissió de separatrius usant tècniques de mathing complex i ressurgència aplicades a l' equació de hamilton-jacobi. thesis phd. *Universitat Politènica de Catalunya*.

Olivé, C., Sauzin, D., y M-Seara, T. (2003). Resurgence in a hamilton-jacobi equation. *Annales de lÍnstitut Fourier*, 53(4):1185–1235.

Seara, T. M. y Sauzin, D. (2003). Borel summation and the theory of resurgence (resumació de borel i teoria de la ressurgència). *Butl. Soc. Catalana Mat.*, 18(1):131–153.

Simó, C. y Vieiro, A. (2009). Resonant zones, inner and outer splittings in generic and low order resonances of area preserving maps. *Nonlinearity*, 22(5):1191–1245.

Utochkina, E., Zyukin, V., y Sapronov, I. (2014). About smooth solutions of the euler differential equation. *Actual directions of scientific researches of the XXI century: theory and practice*, 2:89–91.