Publicación cuatrimestral. Vol. 5, No. 1, Enero/Abril, 2020, Ecuador (p. 63-71). Edición continua

Ciencias Matemáticas

Artículo de Divulgación

UNA VERSIÓN LINEAL DEL PROBLEMA DE KURATOWSKI

Ismael Cohen*, Giovanni Wences, Jorge Rodriguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Rafael Segundo Sanchez Anillo

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad de la Costa, Colombia.

Email: jrodri@uninorte.edu.co, jorgelrodriguezc@mail.uniatlantico.edu.do

*Autor para correspondencia: icohen@cuc.edu.co

Recibido: 25-05-2019 / Aceptado: 22-04-2020 / Publicación:30-04-2020

Editor Académico: Miguel José Vivas-Cortez

RESUMEN

El presente estudio se enmarca dentro del paradigma de la investigación básica matemática. Nuestro trabajo está orientado hacia el planteamiento de una nueva versión conceptual y la construcción de una prueba formal del reconocido problema de clausura-complemento de Kuratowski en el marco de la teoría de los espacios vectoriales.

Palabras clave: Espacios vectoriales, Problema de Kuratowski, problema de cerradura y complemento.

A LINEAR VERSION OF THE KURATOWSKI'S PROBLEM

ABSTRACT

This study is framed into the basic mathematics research paradigm. This work is geared towards the statement of a new conceptual version and to the construction of a formal proof of the well-known Kuratowski closure-complement problem in the vector space theory frame.

Keywords: Kuratowski's problem, Vector spaces, Closure-complement problem.

UMA VERSÃO LINEAR DO PROBLEMA DE KURATOWSKI

RESUMO

O presente estudo está enquadrado no paradigma da pesquisa matemática básica. Este trabalho está voltado para afirmação de uma nova versão conceitual e para a construção de uma prova formal do bem conhecido problema de complemento de roupas de Kuratowski no quadro da teoria linear do espaço.

Palavras chave: Problema de Kuratowski, Espaços vetoriais, Problema de fechamento-complemento

Citación sugerida: Ismael Cohen, Giovanni Wences, Jorge Rodriguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Rafael Segundo Sanchez Anillo . UNA VERSIÓN LINEAL DEL PROBLEMA DE KURATOWSKI. Revista Bases de la Ciencia, 5(1), 63 -71. DOI: 10.33936/rev_bas_de_la_ciencia.v5i1.1787 Recuperado de: https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/1787

Orcid IDs:

Dr. Ismael Cohen: https://orcid.org/0000-0003-2305-6974

Dr. Giovanni Wences: https://orcid.org/0000-0003-3745-2118

Dr. Jorge Rodriguez Contreras: https://orcid.org/0000-0002-1953-5350

MCs. Alberto Reyes Linero: https://orcid.org/0000-0002-9024-5006

Dr. Miguel José Vivas-Cortez: https://orcid.org/0000-0002-1567-0264

1. INTRODUCCIÓN

Teorema 1 (Teorema de Kuratowski)**.** *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$ entonces a lo más 14 conjuntos pueden ser obtenidos de A al tomar clausuras y complementos. Además, existe un espacio donde esta cota se alcanza.*

Este resultado también conocido como el Teorema de Clausura-Complemento de Kuratowski, ha sido objeto de estudio de un sin número de autores (Berman y Jordan, 1975; Fife, 1991; Santiago, 2019; Koenen, 1966; Langford, 1971; Sherman, 2010; Villegas, Sestier y Olivares, 2000). La sencillez de su planteamiento y la armonía existente entre los conceptos que relaciona son los principales responsables de su gran reconocimiento desde su aparición (Kuratowski, 1922).

Una de las aproximaciones más convenientes para el estudio de este resultado es a través de su interpretación en el lenguaje funcional. Sobre el espacio topológico (X, τ) se consideran los operadores complemento y clausura definidos como $C(A) = X - A$ y $\text{cl}(A) = \bar{A}$. Se pueden dar pruebas del Teorema estudiando las propiedades de estos operadores (Gardner y Jackson, 2008; Fife, 1991).

Es bastante claro que a través de los años, se han presentado diferentes tipos de generalizaciones de este resultado (Brzozowski, Grant y Shallit, 2009; Hammer, 1960; Koenen, 1966; Santiago, 2019). Nuestro objetivo es presentar un caso particular del resultado presentado en (Santiago, 2019), en el contexto de los espacios vectoriales. Somos conservadores en nuestro método de aproximación, toda vez que precisamos del estudio de funciones definidas sobre espacios lineales que hereden las propiedades fundamentales de la clausura topológica.

En este sentido, dado el espacio vectorial V lo que entenderemos por operador "*span*", será la función $\text{L} : \mathscr{P}(V) \longrightarrow \mathscr{P}(V)$ que a cada subconjunto $S \in \mathscr{P}(V)$ lo mapea en el subespacio vectorial generado por S. Aquí $\mathscr{P}(V)$ es el conjunto partes de V. Observamos que el span de S coincide formalmente con la intersección de todos los subespacios que contienen a S (Friedberg, Insel y Spence, 1982), así como la clausura de un conjunto en un espacio topológico (X, τ) es la intersección de todos los cerrados que lo contienen.

Las operaciones fundamentales de la clausura expuestas en (Engelking, 1989; Munkres, 2000), plantean que sobre el espacio (X, τ) verificamos:

(T.1.) $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(T.2.) $A \subseteq \text{cl}(A)$ para todo $A \in \mathscr{P}(X)$.

(T.3.) $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ para todo $A, B \in \mathscr{P}(X)$.

(T.4.) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ para todo $A \in \mathscr{P}(X)$.

2. ANALOGÍA FUNDAMENTAL Y RESULTADOS PREVIOS.

Lo que queremos mostrar ahora es la analogía existente entre los espacios topológicos con el operador clausura y los espacios vectoriales emparejados con el operador span. El siguiente resultado es determinante en la justificación de nuestro propósito.

Lema 1. *Si S y T son subconjuntos de un espacio vectorial V sobre un campo K, entonces $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.*

Demostración. Para $x \in \mathrm{L}(S \cup T)$, existe un conjunto finito $H = \{h_1,\ h_2,\ \ldots\ , h_n\} \subseteq S \cup T$ que satisface $x = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n$ donde $\alpha_1,\ \ldots\ ,\ \alpha_n \in K$. Por la definición de $S \cup T$ podemos escoger $\tilde{S} \subseteq S$ y $\tilde{T} \subseteq T$ tales que $\tilde{S} \cap \tilde{T} = \emptyset$ y $\tilde{S} \cup \tilde{T} = H$. Consideremos $\tilde{S} = \{s_1,\ \ldots\ ,\ s_m\}$ y $\tilde{T} = \{t_1,\ \ldots\ ,\ t_r\}$. Por las propiedades de V como espacio vectorial tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n \\ &= [\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_m s_m] + [\gamma_1 t_1 + \cdots + \gamma_r t_r], \end{aligned}$$

donde $(\beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ es una permutación de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dado que $s = \beta_1 s_1 + \cdots + \beta_m s_n \in \mathrm{L}(S)$ y $t = \gamma_1 t_1 + \cdots + \gamma_r t_r \in \mathrm{L}(T)$, se tiene que $x = s + t \in \mathrm{L}(S) + \mathrm{L}(T)$. La contenencia restante $\mathrm{L}(S) + \mathrm{L}(T) \subseteq \mathrm{L}(S \cup T)$ no es muy difícil de mostrar. $\square$

Por el anterior resultado y la definición presentada, podemos verificar que sobre cualquier espacio vectorial se satisfacen las propiedades:

(V.1.) $\mathrm{L}(\emptyset) = \{e\}$.

(V.2.) $S \subseteq \mathrm{L}(S)$ para todo $S \subseteq V$.

(V.3.) $\mathrm{L}(S \cup T) = \mathrm{L}(S) + \mathrm{L}(T)$ para todo $S, T \subseteq V$ (Lema 1).

(V.4.) $\mathrm{L}(\mathrm{L}(S)) = \mathrm{L}(S)$ para todo $S \subseteq V$.

Notar que el ítem (V.3.), contempla una condición mucho más fuerte que $\mathrm{L}(S) \cup \mathrm{L}(T) \subseteq \mathrm{L}(S \cup T)$. De esta manera la semejanza entre las propiedades fundamentales de los espacios topológicos con la operación clausura [enunciadas en los numerales de (T.1.) hasta (T.4.)] y los espacios vectoriales con la operación span [enunciadas en los numerales de (V.1.) hasta (V.4.)] queda completamente expuesta.

Los siguientes resultados jugarán un papel completamente trascendental en la prueba de nuestro Teorema principal. Estos conforman una sustanciosa lista de propiedades que caracterizan espacios lineales.

Lema 2. *La unión de dos subespacios de un espacio vectorial tiene estructura de subespacio si y solo si uno de los subespacios está contenido en el otro.*

Demostración. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$ y si $B \subseteq A$, luego $A \cup B = A$ luego la implicación que va de derecha a izquierda queda demostrada.

Para demostrar el recíproco, sean A y B subespacios de V tales que $A \cup B$ es también subespacio vectorial. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $a \in A - B$ y $b \in B - A$. Dado que $A \cup B$ es subespacio, tenemos que $a + b \in A \cup B$ y de esta forma $a + b \in A$ o $a + b \in B$. Si se cumple el primer caso, entonces $b = (a + b) - a \in A$, lo cual es absurdo; si se da el segundo caso, se tiene que $a = (a + b) - b \in B$ lo cual también es absurdo. $\square$

Corolario 1. *Si A es un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un campo K, entonces $L(A) = V$ o $L(V - A) = V$.*

Demostración. Afirmamos la siguiente proposición:

(*) Si S es un subespacio propio de un espacio lineal V, entonces $\mathrm{L}(V - S) = V$.

En efecto, es claro que $V = S \cup \mathrm{L}(V - S)$. Si $\mathrm{L}(V - S)$ es subespacio propio de V, se llegaría a una contradicción del Lema 2. Concluimos así que $\mathrm{L}(V - S) = V$, en este caso.

De esta forma, si $A \subseteq V$ entonces $\mathrm{L}(A)$ es un subespacio propio o $\mathrm{L}(A) = V$, lo cual muestra el resultado, ya que si $\text{span}(A)$ es propio entonces por la afirmación (*), $\text{span}(V - \text{span}(A)) = V$ y como A es subconjunto de $\text{span}(A)$, $V = \text{span}(V - \text{span}(A))$ es subconjunto de $\text{span}(V - A)$. Es decir $V = \text{span}(V - A)$. $\square$

3. UNA VERSIÓN LINEAL DE KURATOWSKI.

Por todo lo anteriormente discutido, tenemos herramientas para formular una versión lineal del Teorema de Clausura-Complemento, además de construir formalmente su demostración. Notamos que el span toma el lugar de la clausura en espacios lineales y que la interacción entre la suma de conjuntos y la unión juegan un papel bastante determinante.

Teorema 2. *Sean $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un campo K y $A \in \mathscr{P}(V)$. Al aplicar de forma consecutiva las operaciones de complemento y span al conjunto A (en cualquier orden que escojamos), podemos obtener no más de 8 subconjuntos diferentes de V.*

Demostración. Empezamos definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ el término:

$$x_n = \begin{cases} \mathrm{L}(x_{n-1}), & \text{si } n \text{ es impar.} \\ \\ V - x_{n-1}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

De esta forma, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se compone por la totalidad de los subconjuntos de V que se obtienen de $x_0 = A$, aplicando primero el operador span y luego alternando la aplicación complemento y span iterativamente, en ese orden. Si $\mathrm{L}(A)$ es propio, luego por Corolario 1 tenemos que $x_3 = V$. Así se deduce que $x_4 = \emptyset$ y también que $x_5 = \{0_V\}$. La aparición de posibles nuevos subconjuntos de V producidos por esta sucesión se detiene puesto que $x_7 = V$. Mostramos así que:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \tag{1}$$

donde los subconjuntos de esta sucesión se enlistan como:

$$x_1 = \mathrm{L}(A),\ x_2 = V - \mathrm{L}(A),\ x_3 = V,\ x_4 = \emptyset,\ x_5 = \mathrm{L}(\emptyset) = \{0_V\},\ x_6 = V - \{0_V\}.$$

Concluimos que este procedimiento produce a lo más seis subconjuntos distintos de V a partir de A.

Por otro lado, podemos definir:

$$y_n = \begin{cases} V - y_{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \\ \\ \mathrm{L}(y_{n-1}), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Acá consideramos $y_0 = A$. Así construimos las sucesión de todos los subconjuntos de V que se obtienen de A tomando su complemento y luego aplicando iterativamente operador span y complemento, en ese orden. La sucesión $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots$, viene dada por:

$$V - A,\ \mathrm{L}(V - A),\ V - \mathrm{L}(V - A),\ \mathrm{L}(V - \mathrm{L}(V - A)),\ \ldots \tag{2}$$

Al comparar los términos de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ identificamos los siguientes casos con sus correspondientes resultados. Si $\mathrm{L}(A)$ es propio, entonces $\mathrm{L}(V - A) = V$ por Corolario 1. Así la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por la extensión

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5\},$$

satisfaciendo que

$$y_1 = V - A,\ y_2 = V,\ y_3 = \emptyset,\ y_4 = \{0_V\},\ y_5 = V - \{0_V\}.$$

De esta forma, la sucesión $\{y_n\}$ brinda a lo más un subconjunto adicional de V distinto a los de la Ecuación 1, a saber $V - A$. Si $\mathrm{L}(A) = V$ y $\mathrm{L}(V - A)$ es propio, entonces $\mathrm{L}(V - \mathrm{L}(V - A)) = V$ por la afirmación en el Corolario 1. Luego nuestra sucesión satisface

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7\}$$

donde

$$y_1 = V - A, \quad y_2 = \mathrm{L}(V - A), \quad y_3 = V - \mathrm{L}(V - A), \quad y_4 = V,$$

$$y_5 = \emptyset, \qquad y_6 = \{0_V\}, \qquad y_7 = V - \{0_V\}.$$

Así, en este caso el máximo número de posibles elementos nuevos que brinda la sucesión $\{y_n\}$ es de tres, a saber, $y_1, y_2\ y_3$. Si $\mathrm{L}(A) = V$ y $L(V - A) = V$, entonces $\{y_n\}$ brinda a lo más un subconjunto de V distinto a los dados por la sucesión $\{x_n\}$.

Se sigue de todo lo anterior que el número máximo de elementos que se pueden obtener de un $A \in \mathscr{P}(V)$ al aplicar operaciones de complemento y span alternada y sucesivamente, es a lo más ocho. $\square$

Como aplicacion del anterior resultado mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Sea F un campo. Definimos el espacio de las sucesiones no nulas V_0, como el conjunto de sucesiones $\{x_n\}$ en F que tienen solamente un número finito de términos x_n distintos a cero. Se puede mostrar que V_0 es un espacio vectorial sobre F con las operaciones usuales de funciones, esto es, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ y $r\{x_n\} = \{rx_n\}$. Podemos construir una base sobre V_0 definiendo la sucesión ϕ_k que satisface que todos sus elementos son cero excepto el k-ésimo siendo este igual a 1. Dado que el conjunto $\mathscr{B} = \{\phi_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base para V_0, tenemos que este espacio vectorial es de dimensión infinita y así tiene por lo menos una cantidad numerable de elementos. Consideremos el subconjunto de V_0 dado por la fórmula $H = \{0,\ \phi_1\}$. Luego ni H, ni $V_0 - H$ son subespacios de V_0. Luego la dimensión infinita del espacio vectorial V_0, haría del cálculo de la solución al problema de Kuratowski asociado al conjunto H una labor extremadamente complicada. Notamos que en la hipótesis de nuestro resultado principal (Teorema 2) no es determinante la dimensión del espacio en el calculo de los conjuntos resultantes de la iteración de las operaciones fundamentales del problema. Sea el caso finito o infinito de la dimensión el calculo de estos conjuntos es exacto. Luego podemos* *afirmar por Teorema 2 que la solución al problema de Kuratowski asociado al conjunto H es de a los más 8.*

4. CONCLUSIÓN

En el presente estudio se logra trasladar el problema de clausura y complemento al marco de los espacios vectoriales, construyendo una cota para la solución de dicho problema. Una posible extensión al trabajo sería el cálculo de los conjuntos de Kuratowski asociados a la C*-álgebra dada por la fórmula

$$C_0^* = \left\{ \sum_{\text{finito}} f_k U^k \in C_0(X) \rtimes \mathbb{Z} : \; k \in \mathbb{Z}, \; f_k(0) = 0 \text{ para todo } k \neq 0 \right\},$$

generada en el sentido de Woronowicz por un operador no acotado q-normal σ sobre un espacio de Hilbert separable H con descomposición polar dada por $\sigma = U|\sigma|$ tal que $X := \text{spec}(|\sigma|) \neq 0$ (Cohen y Wagner, 2012, 2014, 2018). La extensión natural del álgebra lineal hacia el análisis funcional y a su vez el salto a la teoría de grupos cuánticos, nos permite alimentar este proyecto de varias analogías ya construidas en la presente investigación. Se especula que la metodología expuesta también logra encontrar extensión a la teoría de módulos, toda vez que los espacios vectoriales constituyen el caso escalar particular en este contexto. Es una tarea ya bastante adelantada de los autores la construcción de estas translaciones. Su divulgación se proyecta como un resultado cercano.

5. REFERENCIAS

Berman, J. y Jordan, S. (1975). The kuratowski closure-complement problem. *American Mathematical Monthly*, 82.

Brzozowski, J., Grant, E., y Shallit, J. (2009). Closures in formal languages and kuratowski's theorem. En Diekert, V. y Nowotka, D., editores, *Developments in Language Theory*, pp. 125–144, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

Cohen, I. y Wagner, E. (2012). A noncommutative 2-sphere generated by the quantum complex plane. *Banach Center Publications*, 98:55–66.

Cohen, I. y Wagner, E. (2014). Function algebras on a 2-dimensional quantum complex plane. *Journal of Physics: Conference Series*, 563:012034.

Cohen, I. y Wagner, E. (2018). K-theory and index pairings for c*-algebras generated by q-normal operators. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 48 (5):1485–1510.

Engelking, R. (1989). *General Topology*. Heldermann Verlag.

Fife, J. (1991). The kuratowski closure-complement problem. *Mathematics Magazine*, 64:180–182.

Friedberg, S. Insel, A. y Spence, L. (1982). *Linear algebra.* Illinois State University Editions.

Gardner, B. y Jackson, M. (2008). The kuratowski closure-complement theorem. *New Zealand Journal of Mathematics [electronic only]*, 38:841–842.

Hammer, P. (1960). Kuratowski's closure theorem. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Derde Serie*, 8 (2):74–80.

Koenen, W. (1966). The kuratowski closure problem in the topology of convexity. *The American Mathematical Monthly*, 73 (7):704–708.

Kuratowski, K. (1922). Sur l′opération $\bar{a}$ de l′analysis situs. *Fundamenta Mathematicae*, 3:182–199.

Langford, E. (1971). Characterization of kuratowski 14-sets. *The American Mathematical Monthly*, 78 (4):362–367.

Munkres, J. (2000). *Topology*. Prentice Hall.

Santiago, J. H. (2019). The group-theoretic analog of kuratowski's closure-complement theorem. *The American Mathematical Monthly*, 126(6):519–526.

Sherman, D. (2004). Variations on kuratowski's 14-set theorem. *The American Mathematical Monthly*, 117(2):113–123.

Villegas, L. Sestier, A. y Olivares, J. (2000). Lecturas básicas en topología general. *Revista Aportaciones Matemáticas*, 28:10–16.