Revista Bases de la Ciencia - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 6, No 1, Enero/ Abril, Año 2021, Ecuador (p. 49-56). Edición continua

Ciencias Matemáticas

Artículo de Investigación

OPERADORES DE RIESZ EN EL $\boldsymbol{Alglat(T)} \cap \{\boldsymbol{T}\}'$

Edixo Rosales

Centro Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias. Maracaibo, Venezuela. Universidad Rafael Urdaneta, Departamento de Ingeniería. Maracaibo, Venezuela. E-mail: edixorosales@gmail.com

Autor para la correspondencia: edixorosales@gmail.com

Recibido: 23-07-2020 / Aceptado: 18-02-2021 / Publicación: 30-04-2021

Editor Académico: Miguel José Vivas Cortez

RESUMEN

En este trabajo X es un espacio de Banach y $B(X)$ denota los operadores acotados. Si $T \in B(X)$, por $lat(T)$ entenderemos los subespacios invariantes por T. Se dice que T es lleno, si $\overline{T(M)} = M$, para todo $M \in lat(T)$ (la barra indica la clausura en la topología inducida por la norma). Se prueba principalmente el siguiente resultado: Sean X un espacio de Banach y $T \in B(X)$ acotado por abajo. Sea $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ un operador de Riesz. Si K es lleno, entonces T es lleno. Aquí $Alglat(T) = \{S \in B(X): M \in lat(T) \Longmapsto M \in lat(S)\}$ y $\{T\}' = \{S \in B(X): S \circ T = T \circ S\}$.

Palabras clave: Operador lleno, operador de Riesz, operador acotado por abajo.

RIESZ OPERATORS IN $\boldsymbol{Alglat(T)} \cap \{\boldsymbol{T}\}'$

ABSTRACT

In this work X is a Banach space and $B(X)$ denotes the bounded operators. If T $\in$ B(X), for $lat(T)$ we will understand the invariant subspaces for T. An operator T is full, if $\overline{T(M)} = M$, for all $M \in latT$ (the bar indicates the closure in the topology induced by the norm). The following result is true: Let X be a Banach space, $T \in B(X)$ a bounded below operator and $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ a Riesz operator: If K is a full operator, then T is a full operator. Here $Alglat(T) = \{S \in B(X): M \in lat(T) \Longmapsto M \in lat(S)\}$ and $\{T\}' = \{S \in B(X): S \circ T = T \circ S\}$.

Keywords: full operator, Riesz operator, bounded below operator.

OPERADORES DE RIESZ EM $\boldsymbol{Alglat(T)} \cap \{\boldsymbol{T}\}'$

RESUMO

As Neste trabalho, X é um espaço de Banach e $B\,(X)$ indica os operadores limitados. Se $T \in B\,(X)$, por $lat\,(T)$, entenderemos os subespaços invariantes por T. Diz-se que T é cheio, se $\overline{T(M)} = M$, para todo $M \in lat\,(T)$ (a barra indica o fechamento na topologia padrão). O seguinte resultado é comprovado principalmente: Seja X um espaço de Banach e $T \in B\,(X)$

delimitado por baixo. Seja $K \in Alglat\,(T) \cap \{T\}'$um operador Riesz. Se K estiver cheio, T estará cheio. Assim: $Alglat\,(T) = \{S \in B\,(X): M \in lat\,(T) \Longmapsto M \in lat\,(S)\}\, e\, \{T\}' = \{S \in B\,(X): S \circ T = T \circ S\}$.

Palavras chave: operador completo, operador Riesz, operador limitado abaixo.

Citación sugerida: Rosales, E. (2021). Operadores de Riesz en el Alglat(T)∩{T}'. Revista Bases de la Ciencia, 6(1), 33-48. DOI: https://doi.org/10.33936/rev_bas_de_la_ciencia.v%vi%i.3158 Recuperado de: https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/3158

1. INTRODUCCIÓN

Jaime Bravo en su tesis doctoral (Bravo, 1980), caracteriza operadores llenos, a partir de la propiedad de ser lleno un operador compacto en su álgebra débil generada. Posteriormente, algunos de sus estudiantes de postgrado, abordaron el caso para operadores llenos casi nilpotentes en su álgebra débil generada. Es conocido que la suma de un operador compacto, más uno casi nilpotente, es un operador de Riesz, realmente en un espacio de Hilbert separable, todos los operadores de Riesz se escriben de esta manera (Dowson, 1978). El paso natural era considerar en el álgebra débil un operador de Riesz y tratar de concluir la misma respuesta de los dos casos anteriores. Wilson Pacheco en (Pacheco, 2007) demuestra que, si en el álgebra débil generada por un operador unitario, existe un operador de Riesz lleno, entonces el operador es lleno; lo cual da una respuesta parcial al problema propuesto para operadores inyectivos en general. Este trabajo retoma el estudio de operadores llenos, pero a la luz de operadores en espacios de Banach y presenta algunas generalizaciones del tema.

Suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos del análisis funcional. Sin embargo, es pertinente señalar que (Kreiyszig, 1978) es un texto básico fundamental para conocer del tema. En (Rosales, 2016) se presentan resultados sobre operadores llenos que podrían servir de ayuda, al igual que nuestros preliminares. Los operadores de Riesz pueden ser estudiados en (Dowson, 1978).

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Para nosotros, X es un espacio de Banach complejo y X^* su espacio dual. Por $B(X)$ denotamos el espacio de los operadores lineales acotados. Un subespacio M de X es siempre entendido como cerrado, con respecto a la topología de la norma. Un subespacio M se llama invariante para $T \in B(X)$, si $TM \subset M$. Por $lat(T)$ entendemos, la familia de todos los subespacios invariantes para T.

Un $T \in B(X)$ se dice que es **lleno (o regular)**, si $\overline{TM} = M$ $(\forall M \in latT)$, donde la barra denota la clausura en la topología de la norma. Diremos que un operador $A \in Alglat(T)$, si dado $M \in lat(T)$, entonces $M \in lat(A)$. De igual manera, un operador $A \in \{T\}'$, si $T \circ A = A \circ T$.

Si $T \in B(X)$, por $\sigma(T) = \{\lambda \in C: T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$ definimos el espectro del operador. Un subconjunto importante del espectro $\sigma(T)$, es el espectro puntual $\sigma_p(T) = \{\lambda \in C: \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$. Un $\lambda \in \sigma_p(T)$, se le llama valor propio del operador T.

Al subconjunto de los números complejos $\rho(T) = C - \sigma_p(T)$ se le denomina la resolvente del operador T. En la resolvente $\rho(T)$, consideramos su subconjunto $\rho_\infty(T)$, que es la componente conexa no acotada de la resolvente.

Si $T \in B(X)$ y $M \in latT$, consideramos $\hat{X} = X/M$ y $\hat{T} \in B(\hat{X})$, donde $\hat{T}(x+M) = T(x) + M$. Recordemos que X/M es el espacio de Banach cociente y escribiremos la clase $x + M = \hat{x}$.

Si $K \in B(X)$, cumple que, dada una sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$, existen $y \in X$, una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$, tales $K(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\ \|} y$, diremos que K es un operador compacto. Una clase más general de operadores, la constituyen los operadores de Riesz. Un $K \in B(X)$ es un operador de Riesz, si cumple las propiedades: (1) Si $\lambda \in C, \lambda \neq 0$, entonces ker $(T - \lambda I)^n$ ($\forall\, n \geq$1), es de dimensión finita. (2) Si $\lambda \in C, \lambda \neq 0$, entonces $(T - \lambda I)^n(X)$ ($\forall\, n \geq 1$), es cerrado (3) Si $\lambda \in C$ y existe $\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset \sigma_p(T)$, una sucesión infinita y $\lambda_n \to \lambda$, entonces $\lambda = 0$. Como antes habíamos afirmado, todo operador compacto K es de Riesz. Un $A \in B(X)$ se dice casi nilpotente, si $\sigma(A) = \{0\}$. Es conocido que la $K + A$ es de Riesz, $\forall\, K$ compacto, $\forall\, A$ casi nilpotente.

Enunciamos algunos resultados, importantes para el desarrollo de la investigación:

Teorema 1. Sea X un espacio de Banach y $T \in B(X)$. Si Tno es lleno, entonces existen, un vector no nulo $x \in X$ y $f \in X^*$, tales que $f(x) = 1$ y $f(T^n(x)) = 0, \forall\, n \geq 1$.

Demostración. Si T no es lleno, existe $M \in latT$, tal que $\overline{T(M)} \subsetneq M$. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $x \in M, f \in X^*$, tales que $f(x) = 1\, y\, f(T(M)) = \{0\}$. Como $T^n(x) \in M, \forall\, n \geq 1$, se deduce lo afirmado.

Teorema 2. (Sarason) Sean $T \in B(X)$, $\rho(T)$ la resolvente de T y ρ_∞ su componente conexa no acotada. Se cumplen:

(1) Si λ_1 y λ_0 pertenecen a la misma componente conexa de $\rho(T)$, entonces $lat(T - \lambda_1 I)^{-1} = lat(T - \lambda_0 I)^{-1}$

(2) Si $\lambda \in \rho_\infty$, entonces $lat(T - \lambda I)^{-1} = lat(T)$

Demostración. Ver (Bravo, 1980).

Teorema 3. Si $T \in B(X)$ es de Riesz, entonces $\hat{T} \in B(\hat{X})$ es de Riesz.

Demostración. Ver (Aiena, 2004).■

Finalizamos esta sección diciendo que $T \in B(X)$ es acotado por abajo, si existe una constante $r > 0$, tal que $r\|x\| \leq \|T(x)\|, \forall\, x \in X$.

Todo operador T acotado por abajo es inyectivo y particularmente importante, cumple que $\overline{T(M)} = T(M), \forall\, M \in lat(T)$. En efecto, sea $T(x_n) \xrightarrow{\|\ \|} y$, $x_n \in M$. Sabemos que $r\|x_n - x_m\| \leq$

$\|T(x_n - x_m)\| \to 0$, por lo tanto $\{x_n\}_{n\in N}$ es de Cauchy en X. Se deduce que, existe $x \in X$ con $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$. Esto asegura que $T(x) = y$.

3. OPERADORES DE RIESZ EN EL $\boldsymbol{Alglat(T)} \cap \{\boldsymbol{T}\}'$

Comenzamos esta sección con dos lemas elementales, pero decisivos en la demostración del resultado fundamental de este trabajo**.**

Lema 1. Sean $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{B(X)}$ y $\boldsymbol{M, N}$ subespacios de $\boldsymbol{X}$, tales que $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{lat(T)}$, $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ y $\overline{\boldsymbol{T(M)}} = \boldsymbol{M}$. Si $\overline{\widehat{\boldsymbol{T}}(\widehat{\boldsymbol{N}})} = \widehat{\boldsymbol{N}}$, entonces $\overline{\boldsymbol{T(N)}} = \boldsymbol{N}$.

Demostración. Sea $x \in N$, luego $\hat{x} = \lim_{n\to+\infty} \widehat{T}(\widehat{w_n})$, $w_n \in N$. Si $\epsilon_k \to 0$, $\epsilon_k > 0$, existen $z_{n_k} \in M$, tal que $\|T(w_{n_k}) + z_{n_k} - x\| \leq \frac{\epsilon_k}{2}$. Por otro lado, existe $r_{n_k} \in M$ con $\|T(r_{n_k}) - z_{n_k}\| \leq \frac{\epsilon_k}{2}$. Se deduce que $\|T(w_{n_k} + r_{n_k}) - x\| \leq \|T(w_{n_k}) + z_{n_k} - x\| + \|T(r_{n_k}) - z_{n_k}\| \leq \epsilon_k \Longmapsto x \in \overline{T(N)}$ ya que $w_{n_k} + r_{n_k} \in N$. Esto dice que $N \subset \overline{T(N)}$. Note que $\widehat{T}(\hat{x}) = \hat{z}$ $(z \in N)$, luego $T(x) \in M + N \subset N$. Es decir $\overline{T(N)} \subset N$.

Lema 2. Sean $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{B(X)}$ y $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{lat(T)}$ con $\overline{\boldsymbol{T(M)}} = \boldsymbol{M}$. Si $\boldsymbol{T}$ es un operador lleno, entonces $\widehat{\boldsymbol{T}} \in \boldsymbol{B(X/M)}$ es un operador lleno.

Demostración. Sea $W \in lat(\widehat{T})$, luego $W = \widehat{N}$, con $N \in lat(T), M \subset N$. Como T es lleno, tenemos que $\overline{T(N)} = N$. Si $x \in N$, entonces $x = \lim_{n\to+\infty} T(w_n)$, $w_n \in N \Longmapsto \hat{x} = \lim_{n\to+\infty} \widehat{T}(\widehat{w_n}) \Longmapsto \hat{x} \in \overline{\widehat{T}(\widehat{N})}$. Es decir

$\widehat{N} \subset \overline{\widehat{T}(\widehat{N})}$. Como $\widehat{T}(\widehat{N}) \subset \widehat{N}$, se deduce el resultado.

El siguiente resultado fue publicado inicialmente en (Karanasios, 1984) y es fundamental para el desarrollo de esta investigación.

Teorema 4. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach y $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{B(X)}$ un operador casi nilpotente y lleno. Si $\boldsymbol{M, N} \in \boldsymbol{lat}$ con $\boldsymbol{M} \subsetneq \boldsymbol{N}$, entonces $\boldsymbol{dimN/M} \neq \boldsymbol{1}$.

Demostración. Si $\boldsymbol{d}imN/M \neq 1$, entonces $N = [x] \oplus M$ $(x \in N - M)$.

Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$, tal que $f(x) \neq 0$.

Nosotros tenemos que $T(x) = \alpha \cdot x + y$ ($y \in M$). Se sigue de lo anterior que $(T - \alpha I)(N) \subset M$.

Si $\alpha = 0, T(N) \subset N,$ entonces $\overline{T(N)} = N \subset M$, lo que es contradictorio.

Asumimos por lo tanto que $\alpha \neq 0$. En este caso $T^n(x) = \alpha^n \cdot x + y_n\ (y_n \in N) \Longmapsto f\big(T^n(x)\big) = \alpha^n \cdot f(x) \Longmapsto \big|f\big(T^n(x)\big)\big| = |\alpha|^n |f(x)| \Longmapsto |\alpha| \leq \frac{\sqrt[n]{\|x\|}\cdot\sqrt[n]{\|T\|^n}}{\sqrt[n]{|f(x)|}} \to 0$. Esto dice que $\alpha = 0$, lo que es contradictorio.

El siguiente resultado será de utilidad para caracterizar operadores llenos.

Lema 3. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach y $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$. Si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}^*$, tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\big) = \mathbf{0}, \forall\, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{M} = \bigvee_{\boldsymbol{n}=\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ el subespacio cerrado generado por las potencias $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$; entonces $\boldsymbol{dimM}/\overline{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{M})} = \mathbf{1}$.

Demostración. Es claro que $x + \overline{T(M)} \neq 0$, por lo tanto $dim\frac{M}{\overline{T(M)}} \geq 1$.

Ahora consideremos $w + \overline{T(M)} \neq 0$, y una red de polinomios $P_d(Z)$, tales que $P_d(T)(x) \xrightarrow{\|\ \|} w \Longmapsto f\big(P_d(T)(x)\big) = P_d(0) \to f(w)$.

Si $Q_d(Z) = P_d - P_d(0)$, entonces $Q_d(T)(x) \in T(M) \Longmapsto$

$\lim\limits_{d} Q_d(T)(x) \in \overline{T(M)}$.

Como $w - f(w)x = \lim\limits_{d} Q_d(T)(x)$, se sigue que $w + \overline{T(M)} = f(w)(x + \overline{T(M)})$, lo que asegura el resultado.

Del resultado previo se deduce:

Teorema 5. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach y $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$. Si $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{Alglat}(\boldsymbol{T})$ es un operador casi nilpotente lleno, entonces $\boldsymbol{T}$ es lleno.

Demostración. Si T no es lleno, existen $x \in X$, $f \in X^*$, tal que

$f(x) = 1$, $f\big(T^n(x)\big) = 0, \forall\, n \geq 1$ y si $M = \bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)$, entonces

$dimM/\overline{T(M)} = 1$.

Por otro lado $M, \overline{T(M)} \in lat(K)$, luego por el teorema 4, deducimos que $dimM/\overline{T(M)} \neq 1$, lo que es contradictorio.

El siguiente resultado generaliza el anterior, con ciertas limitaciones en sus hipótesis y para operadores de Riesz, y es nuestro principal resultado.

Teorema 6. Sean X un espacio de Banach y $T \in B(X)$ acotado por abajo. Sea $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ un operador de Riesz. Si Kes lleno, entonces T es lleno.

Demostración. Supongamos que Tno es lleno, entonces existe un $M \in latT$, tal que $\overline{T(M)} \subsetneq M$.

Suponemos, transitoriamente, que T es simplemente inyectivo.

Sea $\boldsymbol{F} = \left\{N \in lat(T) : \{0\} \subsetneq N \subsetneq M,\ \overline{T(N)} = N\right\}$

Estudiemos dos casos para esta familia $\boldsymbol{F}$.

$(\mathbf{1})$ $\boldsymbol{F} = \emptyset$.

Si $K|M$, entonces $K|M \in B(M)$ es de Riesz y $K|M \in Alglat(T|M) \cap \{T|M\}'$.

Si $\sigma(K|M) = \{0\}$, deducimos por el teorema 5 que $T|M$ es lleno, lo que es contradictorio. Por lo tanto, existe $\lambda \in \sigma(K|M) - \{0\}$. Sea

$M_1 = Ker((K|M) - \lambda I) \in lat(T|M)$ es finito-dimensional Como T es inyectivo, tenemos que $T(M_1) = M_1$. Esto contradice que $\boldsymbol{F} = \emptyset$. Esto prueba que Tes lleno.

2. $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

Sea el subespacio cerrado generado por los $N \in \boldsymbol{F}$ que denotamos mediante $L = [N : N \in F]$. Es claro que $L \in \boldsymbol{F}$ y si $N \in \boldsymbol{F}$, entonces $N \subset L$.

Consideramos ahora $\hat{X} = X/L$ y los operadores $\hat{T},\ \hat{K} \in B(\hat{X})$. Por el lema 2, sabemos que $\hat{K}$ es lleno. Es fácil probar que $\hat{K} \in Alglat(\hat{T}) \cap \left\{\hat{T}\right\}'$.

Demostremos que el operador $\hat{T}$ es inyectivo. En efecto, si $\hat{T}(\hat{x}) = 0$, entonces $T(x) \in L = T(L)$ (ya que T es acotada por abajo). Es decir $T(x) = T(y)$, luego $x = y \in L$. Por el lema 1, deducimos que $\overline{\left(\hat{T}\right)(\widehat{M})} \subsetneq \widehat{M}$.

Probemos que no existe $W \in lat(\hat{T})$, tal que $\overline{\left(\hat{T}\right)(W)} = W$, con $\{0\} \subsetneq W \subsetneq \widehat{M}$.

En efecto, $W = \widehat{N}$ con N subespacio cerrado con $L \subsetneq N \subset M$. Como $\overline{\left(\hat{T}\right)(\widehat{N}\ )} = \widehat{N}$, deducimos que $\overline{T(N)} = N$, lo que contradice la máximalidad de L. Siguiendo los mismos argumentos de la primera parte llegaremos a una contradicción.

4. REFERENCIA

Aiena, P. (2004). Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers. Kluwer Acad. Publishers. Dordrecht.

Bravo, J. (1980). Relations between latT; latT^(-1); latT^2 and operators with compact imaginary parts. Ph. D. Dissertation. University of California, Berkeley.

Dowson, H. R. (1978). Spectral Theory of Linear Operator. Academic Press. New York.

Karanasios, S. (1984). Full operators and approximations of inverses. ournal of the London Mathematical Society, s2-30: 295-304. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-30.2.295

Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. London.

Pacheco, W. (2007). Operadores Llenos. Trabajo de ascenso para optar a la categoría de profesor titular. Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia. Maracaibo.

Rosales, E. (2016). Regularidad de Operadores y Aplicaciones. Editorial Académica Española. Barcelona.

Contribución de autores

Autor	Contribución
Edixo Rosales	Concepción y diseño, redacción del artículo y revisión del documento.