UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 184 -200). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4062.

SOBRE TEORÍA DEL PUNTO FIJO Y LAS FUNCIONES DE CONTROL. ESTADO DEL ARTE.

Edwin Alexander Loor Andrade[1], **Wilmer Eduardo Barrera Yayes**[2]

[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: eloor9009@utm.edu.ec
[2] Departamento de Matemáticas y Estadística, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador. Email: wilmer.barrera@utm.edu.ec

*Autor para correspondencia: eloor9009@utm.edu.ec

Recibido: 06-10-2021 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación 27-12-2022
Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza

RESUMEN

La teoría del punto fijo estudia las condiciones sobre una o dos funciones y sobre el espacio en donde se encuentran definidas, a fin de garantizar la existencia y unicidad de punto fijo. Durante la primera mitad del siglo XX, Stefan Banach probó un teorema de punto fijo para una función contractiva definida sobre un espacio métrico completo. Este teorema fue generalizado de diferentes formas por varios autores, llegando a obtenerse resultados que involucran dos funciones conmutativas, como es el caso del teorema introducido por Gerald Jungck. A partir de 1984, aparecen generalizaciones del principio de contracción de Banach, en donde la desigualdad contractiva depende de una función de control llamada: función que altera la distancia entre puntos. El propósito de este artículo es realizar una revisión actualizada sobre las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de punto fijo para una y dos funciones compatibles definidas sobre un espacio métrico completo, considerando las funciones que alteran distancia y reemplazando la constante de contracción por una función. Se dan ejemplos que evidencian la importancia de las generalizaciones de los teoremas de punto fijo, tanto de Banach como de Jungck. Se proponen condiciones sobre un par de funciones para garantizar la existencia y unicidad de un punto fijo en común mediante el uso de funciones que alteran distancia.

Palabras clave: Funciones que alteran distancias, funciones compatibles, funciones continuas, función decreciente, punto fijo.

ON FIXED POINT THEORY AND CONTROL FUNCTIONS. STATE OF THE ART.

ABSTRACT

The fixed-point theory studies the conditions either one or two mappings and the space of definition them, such that the existence and uniqueness of fixed point can be guaranteed. During the first half of the 20th century, Stefan Banach proved a fixed-point theorem for a contractive function defined on a complete metric space. This theorem was developed in several ways by many authors obtaining results that involve two commutative applications, as is the case of theorem introduced by Gerald Jungck. From 1984 appear extensions of Banach's contraction principle where the contractive inequality depends on a control function called: altering distance function between points. The goal of this paper is to make an updated review of conditions that guarantee the existence and uniqueness for one and two compatible functions, defined on a complete metric space and considering the altering distance functions and replacing the contraction constant by a function. Some examples that show the importance of generalizations of fixed-point theorems both Banach and Jungck, are given. We provide conditions on a pair of mappings that guarantee the existence and uniqueness of common fixed point by using altering distance functions.

Keywords: Altering distance function, compatible function, continuous function, decreasing function, fixed point.

NA TEORIA DO PONTO FIXO E FUNÇÕES DE CONTROLE. ESTADO DA ARTE.

RESUMO

A teoria do ponto fixo estuda as condições de uma ou duas funções e do espaço onde são definidas, de forma a garantir a existência e a unicidade de um ponto fixo. Durante a primeira metade do século XX, Stefan Banach provou um teorema de ponto fixo para uma função de contração definida em um espaço métrico completo. Este teorema foi generalizado de diferentes formas por diversos autores, obtendo-se resultados que envolvem duas funções comutativas, como é o caso do teorema introduzido por Gerald Jungck. A partir de 1984, surgem generalizações do princípio da contração de Banach, onde a desigualdade da contração depende de uma função de controle chamada: função que altera a distância entre os pontos. O objetivo deste artigo é realizar uma revisão atualizada sobre as condições que garantem a existência e unicidade de um ponto fixo para uma e duas funções compatíveis definidas sobre um espaço métrico completo, considerando as funções que alteram a distância e substituindo a constante de contração por uma função. São apresentados exemplos que mostram a importância das generalizações dos teoremas de ponto fixo, tanto de Banach quanto de Jungck. Fornecemos condições em um par de mapeamentos que garantem a existência e unicidade de um ponto fixo comum usando funções de distância alteradas.

Palavras chave: Função que altera o comprimento, função compatível, função contínua, função decrescente, ponto fixo.

Citación sugerida: Loor, E., Barrera, W. (2022). Sobre teoría del punto fijo y las funciones de control. Estado del arte. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 7, (No. Especial), Diciembre, 184 -200. DOI: `https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4062`

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1922 el matemático Polaco S. Banach introdujo uno de los resultados más importantes en la teoría métrica del punto fijo, conocido hoy día como el principio de contracción de Banach, (P.C.B) ver Cárdenas y Gutierrez (2008). Su importancia radica en la gama de aplicaciones que ha tenido en áreas de las matemáticas y otras ciencias.

Desde su aparición se ha publicado una gran cantidad de generalizaciones o extensiones con diversos enfoques, tal es el caso de G. Jungck, quien en 1976 encuentra condiciones sobre un par de funciones a fin de garantizar existencia y unicidad de punto fijo en común, ver Vujaković y cols. (2020). Este aporte permite ver el principio de contracción de Banach como caso particular.

La Teoría del Punto Fijo es una de las herramientas más fuertes y fructíferas de las matemáticas modernas y puede ser considerada un tema central del análisis no lineal. Muchos matemáticos como Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano y Picard han dado su aporte en el estudio del mismo, y en las últimas 5 décadas, la teoría de punto fijo ha tenido suficientes contribuciones al estudio e investigación del mismo ver Vandana (2017).

Por lo anteriormente expuesto se ha trabajado sobre la creación de condiciones que permita garantizar la existencia y unicidad de punto fijo en común para un par de funciones.

En el año 1962, E. Rakotch generalizó el principio de contracción de Banach, al sustituir la constante de contracción por una función monótona decreciente, $\alpha : \mathbb{R}^+ \to [0, 1)$ ver Rakotch (1962).

A partir de 1976, se introduce un resultado muy importante en la teoría métrica del punto fijo, el cual establece condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de punto fijo en común para un par de aplicaciones ver Vujaković y cols. (2020). Este resultado establece lo siguiente:

Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones tales que, $g(X) \subset f(X)$, f conmuta con g, f es continua y existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que:

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(f(x), f(y)),\ \forall x, y \in X.$$

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = g(z) = z$.

Este resultado se conoce como el teorema de punto fijo de Jungck ver Cárdenas y Gutierrez (2008).

Durante los siguientes años aparecen otras condiciones que generalizan el concepto de conmutatividad, tales como: funciones débilmente conmutativas, funciones compatibles, funciones débilmente compatibles, entre otros y, de esta forma se tienen nuevos resultados de punto fijo en común para dos funciones a través de los aportes de Jungck (1976), Koierngi y cols. (2018), Rhoades y cols. (1984) y Morales y Rojas (2012b).

Definición 1. (Pata (2019)). *Sean X un conjunto no vacío y $f : X \to X$ una función. Un elemento x en X es un punto fijo de f, si $f(x) = x$.*

Se denota por F_f al conjunto de todos los puntos fijos de una función f.

No todas las funciones tienen punto fijo, para lo cual se considera la función $f(x) = x+1$, definida sobre $\mathbb{R}$. Si x es un punto fijo de f, entonces

$$x = x + 1.$$

Dado que lo anterior no se cumple para ningún valor $x \in \mathbb{R}$, se concluye que f no tiene punto fijo.

En la teoría métrica del punto fijo, el objetivo es estudiar las condiciones de las funciones involucradas y/o el espacio de definición para garantizar existencia y unicidad de punto fijo. Uno de los pioneros en esta área fue Banach, con el principio de contracción.

2. PRINCIPIO DE CONTRACCIÓN DE BANACH

El principio de contracción de Banach o teorema del punto fijo de Banach fue introducido y probado por Stephan Banach en 1922 ver Cárdenas y Gutierrez (2008), el cual generó una gran impresión en la comunidad matemática por la simplicidad de la demostración, al observar que la distancia entre los iterados de una sucesión determinada decrece exponencialmente. Además de garantizar la existencia y unicidad de un punto fijo, nos indica cuál es este punto utilizando para ello un método mecánico, ver Garcia (2020).

El principio de contracción de Banach es de gran importancia por tener múltiples aplicaciones en diferentes campos. Es importante acotar que el origen de este teorema se debe a la demostración que intentó realizar Picard al teorema de Cauchy-Lipschitz de ecuaciones diferenciales, el cual afirma la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales bajo ciertas condiciones. Picard afirmó que el método para demostrar el teorema de Cauchy-Lipschitz es mediante una función que admita la existencia de puntos fijos en su dominio, es decir que tengan elementos invariantes, pero no pudo encontrar un resultado que le pudiera asegurar la existencia del punto fijo que necesitaba hasta que después de unos años más tarde, Banach pudo recoger los estudios de Picard formalizando esta idea y descubriendo así el ahora llamado teorema del punto fijo de Banach ver Garcia (2020). Picard logró demostrar un teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, que generaliza el teorema de Cauchy-Lipschitz sin utilizar el teorema de punto fijo de Banach. Una aplicación directa de este teorema se encuentra en la demostración del teorema de Cauchy-Lipschitz. Otras aplicaciones del principio de contracción de Banach se encuentran en el método de Newton para hallar raíces de ciertas ecuaciones, en la resolución de sistemas lineales, en la existencia de soluciones de ecuaciones integrales, en sistemas de Sturm-Liouville, en fractales, etc.

Definición 2. *Sea (X,d) un espacio métrico. La aplicación $f: X \to X$ es llamada una contracción de Banach en X, si existe una constante $a \in [0,1)$ tal que para todo $x, y \in X$, se tiene*

$$d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x,y).$$

La constante a en la desigualdad anterior es llamada constante de contracción.

Ejemplo 1. *Sean $X = \mathbb{R}$ dotado con la métrica euclidiana $d = |\cdot|$ y $f: X \to X$ una función definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in X$. Entonces f es una contracción en X.*

En efecto, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que,

$$|f(x)-f(y)| = \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right| = \left|2\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\right]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{4}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{4}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{4}\right| = \frac{1}{2}|x-y|,$$

es decir

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

En lo que sigue se denota $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Ejemplo 2. *Sea* $X = \mathbb{R}_+$ *dotado con la métrica euclidiana* $d = |\cdot|$. *Se considera la función* $T : X \to X$, *definida por*

$$Tx = \frac{x}{x+1}.$$

Entonces, T *no es una contracción de Banach.*

En efecto, considere $a \in (0,1)$ *(arbitario) y sea* $0 < x < \frac{1}{a} - 1$ *y* $y = 0$. *Se tiene que,*

$$x < \frac{1}{a} - 1$$

$$a < \frac{1}{x+1}$$

$$a|x| < \frac{|x|}{x+1}$$

$$a|x-0| < \left| \frac{x}{x+1} - \frac{0}{0+1} \right|$$

$$\therefore a \cdot d(x,0) < d(Tx, T0).$$

Así, claramente T *no es una contracción de Banach.*

A continuación se enuncia el teorema del punto fijo de Banach, el cual garantiza la existencia y unicidad de punto fijo en una función.

Teorema 1 (Banach (1922)). *Sean* (X,d) *un espacio métrico completo y* $f : X \to X$ *una función. Si existe* $a \in (0,1)$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x,y), \ para\ cualquier\ x, y \in X,$$

entonces

1. f *tiene un único punto fijo, es decir existe* $z \in X$ *tal que* $F_f = \{z\}$,
2. *La iteración de Picard asociada a* f, *es decir la sucesión* $\{x_n\}$ *definida por:*

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

converge a z *para cualquier valor inicial arbritario* $x_0 \in X$.

Debido a la importancia de este resultado, varios autores lo generalizaron de diversas formas, tal es el caso de E. Rakotch quien probó un teorema de punto fijo a partir del principio de contracción de Banach, sustituyendo la constante de contracción por una función monótona decreciente ver Rakotch (1962). Así mismo, M. S. Khan, S. Swaleh y S. Sessa, aportaron otro resultado a partir del principio de contracción de Banach considerando un nuevo tipo de contracción, mediante el uso de una función que altera la distancia ver Khan y cols. (1984).

2.1. PUNTO FIJO Y LAS FUNCIONES DE CONTROL

En el siguiente resultado se pone de manifiesto un nuevo tipo de contracción en el cual la constante de contracción ha sido reemplazada por una función monótona decreciente ver Rakotch (1962). Este aporte generaliza el principio de contracción de Banach.

Teorema 2 (Rakotch (1962))**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación y $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ una función monótona decreciente tal que,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y)) \cdot d(x, y), \tag{1}$$

donde $x, y \in X$ y $x \neq y$. Entonces f tiene un único punto fijo.

Es claro que, si se remplaza la función α por una constante $a \in [0, 1)$, se obtiene el principio de contracción de Banach.

S. Khan, S. Swaleh y S. Sessa en el año de 1984 probaron un teorema de punto fijo para una función, en el cual la desigualdad contractiva depende de una función que altera distancia entre puntos del espacio ver Khan y cols. (1984).

Definición 3 (Khan y cols. (1984))**.** *Una función $\psi : [0, +\infty) \to [0 + \infty)$, es llamada una función que altera distancia si cumple las siguientes condiciones:*

1. *$\psi(0) = 0$,*
2. *ψ es una función continua y creciente.*

Se denota por Ψ al conjunto de todas las funciones que alteran distancia.

Ejemplo 3. *Sea $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la función dada por:*

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Entonces:

1. *$\psi(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$*
2. *Es claro que ψ es continua y además, es creciente, puesto que*

$$\psi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0.$$

Por lo tanto $\psi \in \Psi$.

En los siguientes resultados se puede visualizar un nuevo tipo de contracción que incluye el uso de las funciones que alteran distancias y además un aspecto muy importante es que la constante de contracción se remplaza por una función.

Teorema 3 (Khan y cols. (1984)). *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación y $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función continua y creciente que tiene la propiedad $\psi(0) = 0$. Si a es una función decreciente de $\mathbb{R}_+$ en $[0, 1)$ tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq a(d(x, y)) \cdot \psi(d(x, y)), \; \forall \, x, y \in X, \; con \; x \neq y, \tag{2}$$

entonces f tiene un único punto fijo.

Ejemplo 4. *Sean $X = [0, \frac{1}{4}]$ un conjunto dotado con la métrica usual de $\mathbb{R}$, $f : X \to X$ una función definida por $f(x) = x^2$, $a : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ una función definida por $a(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ y $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $\psi(x) = x^3$. Entonces f tiene un único punto fijo. En efecto,*

1. *El espacio X es completo.*
2. *$\psi \in \Psi$, ya que es continua, creciente en X y $\psi(0) = 0$.*
3. *La función $a(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ es monótona decreciente.*
4. *Para mostrar (2) se debe chequear que,*

$$\left|x^2 - y^2\right|^3 \leq \frac{1}{|x - y|^2 + 1} \cdot |x - y|^3 .$$

En efecto, por las condiciones del espacio métrico se tiene,

$$0 \leq |x + y|^3 \leq \frac{1}{64} \quad y \quad 0 \leq \left(|x - y|^2 + 1\right) \leq \frac{17}{16}.$$

Al multiplicar las desigualdades anteriores se obtiene

$$|x + y|^3 \left(|x - y|^2 + 1\right) \leq \frac{17}{1024} \leq 1. \tag{3}$$

Se multiplican ambos lados de la desigualdad (3) por $|x - y|^3$ y se opera algebraicamente, con lo cual se deduce,

$$\left|x^2 - y^2\right|^3 \leq \frac{1}{|x - y|^2 + 1} \cdot |x - y|^3 .$$

Claramente se cumplen las hipótesis del teorema 3. Por lo tanto se concluye que f tiene un único punto fijo.

J. Morales y E. Rojas en el año 2012 introducen un teorema de punto fijo que generaliza el principio de contracción de Banach ver Morales y Rojas (2012a). En este resultado se observa una nueva desigualdad contractiva con el uso de funciones que alteran distancias y cambiando la constante de contracción por una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$, que cumple con la siguiente condición

$$\limsup_{r \to t} \alpha(r) < 1, \qquad \forall \, t \in (0, \infty). \tag{4}$$

La condición (4) fue introducida por Reich como se cita en Klim y Wardowski (2007).

Teorema 4 (Morales y Rojas (2012a)). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una aplicación que satisface la siguiente condición*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \alpha(d(x, y)) \cdot \psi(d(x, y)), \tag{5}$$

donde $\psi \in \Psi$ y $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ con

$$\limsup_{r \to t} \alpha(r) < 1, \qquad \forall\, t \in (0, \infty).$$

Entonces f tiene un único punto fijo $z_0 \in X$ y, para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z_0$.

Observación 1. *Es claro que al reemplazar la función α por una constante $a \in [0, 1)$, se obtiene el principio de contracción de Banach.*

Mediante lo siguiente Morales y Rojas muestran un ejemplo en que el teorema 4 generaliza el principio de contracción de Banach.

Ejemplo 5. (Morales y Rojas (2012a)). *Sea $X = \mathbb{R}_+$ dotado con la métrica euclidiana $d = |\cdot|$, se define $Tx = \dfrac{x}{1+x}$.*

Se considera $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si} \quad t = 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2}, & \text{si} \quad t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Finalmente, sea $\psi(t) = t^2$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. En el ejemplo 2 se verificó que T no es una Contracción de Banach, por lo tanto, el principio de contracción de Banach no se puede aplicar. Ahora, se nota que

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, Ty)) = \psi(|Tx - Ty|) = (Tx - Ty)^2 = \left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right)^2 \\ = \frac{(x-y)^2}{(1+x)^2(1+y)^2} \leq \frac{(x-y)^2}{(1+|x-y|)^2} = \alpha(d(x, y)) \cdot \psi(d(x, y)). \end{aligned}$$

Así, se ha probado que la condición (5) se satisface y todas las condiciones del teorema 4 se cumplen, por lo tanto, del teorema 4 se tiene que T tiene un único punto fijo $z_0 = 0$.

Observación 2. *Es importante destacar que si f es una función que satisface cualquiera de las desigualdades contractivas (1) o (5), entonces f tiene que ser continua.*

En los resultados anteriores se puede observar como las funciones que alteran distancias entre puntos juegan un rol importante en la extensión del principio de contracción de Banach.

A continuación, se hará referencia a teoremas de punto fijo para dos funciones. A partir del año 1975 aumentó el interés por estudiar teoremas de punto fijo en común para un par (o familias) de funciones que satisfacen ciertas condiciones contractivas en espacios métricos. En este sentido varios autores dieron resultados muy interesantes; entre ellos G. Jungck, quien en el año 1976, probó un teorema de punto fijo en común para un par de aplicaciones conmutativas ver Vujaković y cols. (2020), lo que a su vez generalizó el principio de contracción de Banach.

3. PUNTO FIJO EN COMÚN Y LAS FUNCIONES DE CONTROL

Definición 4. *Sea X un conjunto no vacío y $f, g : X \to X$ dos funciones. Se dice que x en X, es un punto fijo en común para f y g, si se verifica*

$$f(x) = g(x) = x.$$

Teorema 5 (Jungck (1976)). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones tal que*

1. *$g(X) \subseteq f(X)$.*
2. *Para $c \in (0, 1)$ se tiene que:*
$$d(g(x), g(y)) \leq c \cdot d(f(x), f(y)), \forall x, y \in X. \tag{6}$$
3. *f es continua.*
4. *f y g son conmutativas.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

La desigualdad (6) es llamada por algunos autores como la contracción de Jungck.

Ejemplo 6. *Sean $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica usual y $f, g : X \to X$ dos funciones que se definen de la siguiente forma: $g(x, y) = \left(7x, \dfrac{y}{3} + 4\right)$, $f(x, y) = \left(11x, \dfrac{y}{2} + 3\right)$. Entonces,*

1. *$g(X) = \mathbb{R}^2$ y $f(X) = \mathbb{R}^2$, por lo tanto $g(X) \subseteq f(X)$.*
2. *Considerando $p = (x, y)$ y $q = (x', y')$ se tiene,*

$$\begin{aligned} d(g(p), g(q)) = \sqrt{(7x - 7x')^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{y'}{3}\right)^2} &\leq \alpha \cdot \sqrt{(11x - 11x')^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{y'}{2}\right)^2} \\ &= \alpha \cdot d(f(p), f(q)). \end{aligned} \tag{7}$$

De (7) se tiene,

$$(7x - 7x')^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{y'}{3}\right)^2 \leq \alpha^2 \cdot \left((11x - 11x')^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{y'}{2}\right)^2\right)$$

$$7^2(x - x')^2 + \frac{1}{3^2}(y - y')^2 \leq \alpha^2 \cdot \left(11(x - x')^2 + \frac{1}{2^2}(y - y')^2\right).$$

Cambiando la expresión $(x - x')$ por a y $(y - y')$ por b se obtiene,

$$7^2a^2 + \frac{1}{3^2}b^2 \leq \alpha^2 \cdot \left(11^2a^2 + \frac{1}{2^2}b^2\right)$$

$$7^2a^2 + \frac{1}{3^2}b^2 \leq 11^2\alpha^2a^2 + \frac{1}{2^2}\alpha^2b^2. \tag{8}$$

La expresión (8) es cierta si, y sólo si, $\alpha \geq 2/3$.

3. *f es continua.*

4. *f y g son conmutativas. En efecto,*

$$f(g(p)) = f\left(7x, \frac{y}{3}+4\right) = \left(11(7x), \frac{\frac{y}{3}+4}{2}+3\right) = \left(77x, \frac{y+30}{6}\right) = g(f(p)).$$

Por lo tanto utilizando el teorema de Jungck se puede afirmar que f y g tienen un único punto fijo en común.

A partir del resultado anterior, comenzarón a aparecer varias generalizaciones del teorema de Jungck en diversos enfoques. En el año 1986 G. Jungck introduce la definición de funciones compatibles, la cual establece lo siguiente

Definición 5. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos funciones. Se dice que f y g son compatibles si*

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0,$$

siempre que $\{x_n\}$ sea una sucesión en X, tal que $f(x_n) \to t$ y $g(x_n) \to t$ para algún $t \in X$.

Ejemplo 7. *Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica euclidiana y $f, g : X \to X$ dadas por*

$$f(x) = 5x^3 \text{ y } g(x) = 2x^3, \ \forall x \in X.$$

Entonces f y g son compatibles. En efecto,

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t, \tag{9}$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} 5x_n^3 = t = \lim_{n\to\infty} 2x_n^3.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (5x_n^3 - 2x_n^3) = \lim_{n\to\infty} 3x_n^3 = 0.$$

Así, (9) se cumple si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Con lo cual se tiene que $t = 0$.

Ahora bien,

$$f(g(x_n)) = f(2(x_n)^3) = 5(2(x_n)^3)^3 = 40(x_n)^9$$

y

$$g(f(x_n)) = g(5(x_n)^3) = 2(5(x_n)^3)^3 = 250(x_n)^9.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = \lim_{n\to\infty} |210(x_n)^9| = 0.$$

En consecuencia f y g son compatibles.

Ejemplo 8. *Sean $X = [0,1]$ con la métrica euclidiana y $f, g : X \to X$ dos funciones dadas por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

f y g no son funciones compatibles.
En efecto, sea $\{x_n\}$ en X una sucesión tal que $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se observa que

$$0 \leq x_n < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_n) = x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}.$$

Ahora se realiza el mismo análisis para $g(x_n)$

$$0 \leq x_n < \frac{1}{2} \Rightarrow g(x_n) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

Claramente se tiene que $f(x_n) \to \frac{1}{2}$ y $g(x_n) \to \frac{1}{2}$.

Por otro lado,

$$d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = |1 - (1 - x_n)| = x_n \to \tfrac{1}{2}.$$

Así, f y g no son compatibles.

El concepto de compatibilidad extiende la noción de conmutatividad como se puede notar en el siguiente resultado.

Proposición 1 (Dávila (2006))**.** *Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos funciones. Si f y g son conmutativas entonces f y g son compatibles.*

Demostración: Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos funciones conmutativas. Entonces se tiene

$$f(g(x)) = g(f(x)), \ \forall x \in X. \tag{10}$$

Ahora bien, sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$. De (10) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0.$$

Por lo tanto f y g son funciones compatibles.

■

En el ejemplo 7 se observa que el recíproco de la Proposición 1 no se cumple.

Observación 3. *En el caso que $\{\{x_n\} \subset X : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\} = \emptyset$, entonces se dice que f y g son trivialmente compatibles.*

El siguiente resultado muestra una forma apropiada de encontrar funciones compatibles cuando se esta trabajando con funciones definidas sobre el espacio métrico $\mathbb{R}^n$ ver Jungck (1986).

Proposición 2 (Jungck (1986))**.** *Para cada $i = 1, \ldots, n$, sean $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tal que (f_i, g_i) son compatibles. Si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ y $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n))$, entonces F y G son funciones compatibles en $(\mathbb{R}^n, d)$, siendo d la métrica euclídea.*

En el año 2012 se prueba un teorema de punto fijo en común para dos aplicaciones el cual generaliza el teorema de Jungck mediante el uso de las funciones compatibles y un tipo de contracción que depende de las funciones que alteran distancia ver Morales y Rojas (2012b)

Teorema 6 (Morales y Rojas (2012b))**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f, g : X \to X$ dos funciones y $\psi \in \Psi$. Si*

1. *g es una función continua.*
2. *$f(X) \subseteq g(X)$.*
3. *f y g son funciones compatibles.*
4. *Existe $a \in [0, 1)$ tal que,*

$$\psi[d(f(x), f(y))] \leq a \cdot \psi[d(g(x), g(y))],\ \forall\, x,y \in X.$$

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Observación 4. *Es claro que si se reemplaza la función ψ por la identidad sobre $\mathbb{R}_+$ se obtiene el teorema del punto fijo de Jungck.*

Ejemplo 9. *Sean $X = \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, $f, g : X \to X$ dos funciones definidas por $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ y $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $\psi(x) = x^2$. Entonces f y g tienen un único punto fijo en común. En efecto,*

1. *g es continua.*
2. *$f(X) \subseteq g(X)$.*
3. *f y g son funciones compatibles. Para verificarlo, considere una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t.$$

Por lo tanto se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^3 = t = \lim_{n\to\infty} x_n^2.$$

Luego, por propiedades de sucesiones convergentes se sigue que,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^3 - x_n^2) = 0.$$

Esto implica que,

$$x_n \to 0 \text{ ó } x_n \to 1.$$

Se tiene entonces que,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \Leftrightarrow x_n \to 0 \text{ o } x_n \to 1.$$

Por lo tanto $t = 0$ *o* $t = 1$.

Ya que $X = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *entonces* $t = 0$.

Así pues,

$$f(g(x_n)) = f((x_n)^2) = ((x_n)^2)^3 = (x_n)^6$$

y

$$g(f(x_n)) = g((x_n)^3) = ((x_n)^3)^2 = (x_n)^6,$$

por lo tanto,

$$|f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = |((x_n)^6) - ((x_n)^6)| = 0,$$

Con lo cual es claro que,

$$\lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = \lim_{n\to\infty} |0| = 0.$$

En consecuencia f *y* g *son compatibles.*

4. *Sea* $a = \frac{49}{64}$. *Entonces se tiene que,*

$$\psi[d(f(x), f(y))] \leq \frac{49}{64} \cdot \psi[d(g(x), g(y))].$$

En efecto,

$$\psi[d(f(x), f(y))] = |x^3 - y^3|^2,$$

por otro lado,

$$\psi[d(g(x), g(y))] = |x^2 - y^2|^2.$$

Dado que $0 \leq x \leq 1/2$ y $0 \leq y \leq 1/2$, *entonces se tiene que,*

$$|x^3 - y^3| \leq \frac{1}{8} \Rightarrow |x^3 - y^3|^2 \leq \frac{1}{64},$$

y

$$|x^2 - y^2| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |x^2 - y^2|^2 \leq \frac{1}{16},$$

ya que,

(a) $x^2 \leq \frac{5}{8}x$,

(b) $xy \leq \frac{x+y}{4}$.

Por lo tanto, $|x^2 + xy + y^2| \leq \frac{7}{8}|(x+y)|$, *con lo cual se tiene*

$$|x^3 - y^3| \leq \frac{7}{8} \cdot |x^2 - y^2|.$$

Así, se concluye que

$$|x^3 - y^3|^2 \leq \frac{49}{64} \cdot \left|x^2 - y^2\right|^2.$$

De esta forma, usando el teorema 6 se concluye que f *y* g *tienen un único punto fijo en común.*

En el siguiente ejemplo se puede notar la importancia del teorema 6 en cuanto a la generalización del teorema de Jungck, es decir, este ejemplo revela que el teorema 6 es una extensión propia del teorema de Jungck.

Ejemplo 10. *Sean* $X = \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ *con la métrica euclidiana y* $f, g : X \to X$ *dos funciones dadas por:* $f(x) = 4x^3$, $g(x) = 6x^3$ *y* $\psi : [0, +\infty) \to [0 + \infty)$ *definida por* $\psi(x) = x^2$. *Entonces* f *y* g *satisfacen las condiciones del teorema 6. En efecto,*

1. g *es continua.*

2. $f(X) \subseteq g(X)$.

3. f *y* g *son funciones compatibles. Para verificarlo, considere una sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t,$$

Por lo tanto se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} 4x_n^3 = t = \lim_{n\to\infty} 6x_n^3.$$

Luego, por propiedades de sucesiones convergentes se sigue,

$$\lim_{n\to\infty} (6x_n^3 - 4x_n^3) = 0,$$

Esto implica que,

$$x_n \to 0.$$

Se tiene entonces que,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to} g(x_n) \Leftrightarrow x_n \to 0.$$

Por lo tanto $t = 0$.

Así pues,

$$f(g(x_n)) = f(6x_n^3) = 4(6x_n^3)^3 = 864(x_n)^9$$

y

$$g(f(x_n)) = g(4x_n^3) = 6(4x_n^3)^3 = 384(x_n)^9,$$

por lo tanto,

$$|f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = |480((x_n^3)^3)|.$$

Con lo cual es claro que,

$$\lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = 0.$$

En consecuencia f *y* g *son compatibles.*

4. *Se considera* $a = \frac{13}{18}$. *Entonces se tiene que,*

$$\psi[d(f(x), f(y))] \leq \frac{13}{18} \cdot \psi[d(g(x), g(y))], \tag{11}$$

es decir,

$$|4x^3 - 4y^3|^2 \leq \frac{13}{18} \cdot |6x^3 - 6y^3|^2.$$

Si $x = y$, *la desigualdad claramente es cierta. Suponga que* $x \neq y$. *Dado que* $\frac{13}{18} > \frac{16}{36}$, *entonces*

$$a > \frac{16}{36} \tag{12}$$

Ahora bien, se multiplica a ambos lados de (12) *por* $|x^3 - y^3|^2$ *se tiene que,*

$$16|x^3 - y^3|^2 < a \cdot 36|x^3 - y^3|^2.$$

Por lo tanto,

$$|4x^3 - 4y^3|^2 < a \cdot |6x^3 - 6y^3|^2.$$

Así, se concluye que (11) *es cierto.*

Claramente se cumplen las condiciones del teorema 6. Por lo tanto se conlcuye que f *y* g *tienen un único punto fijo en común.*

Por otro lado, se observa que

$$f(g(x)) = f(6x^3) = 864x^9$$

y

$$g(f(x)) = g(4x^3) = 384x^9,$$

por lo tanto $f(g(x)) \neq g(f(x))$, *para todo* $x \in X \backslash \{0\}$.

Y así, es posible notar que las funciones dadas no cumplen las condiciones del teorema de Jungck.

4. CONCLUSIONES

En algunos estudios de problemas de situaciones reales, resulta difícil obtener funciones que puedan satisfacer las condiciones apropiadas para su modelación. Este hecho, aunado con el estudio realizado, permite destacar la importancia de los resultados que se han presentado en la teoría del punto fijo, obtenidos al considerar condiciones menos exigentes y manteniendo el norte de la existencia y unicidad de punto fijo. En el caso del teorema del punto fijo de Jungck, se puede destacar que el uso de una función de control en la desigualdad contractiva permitió minimizar el requerimiento de conmutatividad a una condición más sencilla en cierto sentido, como lo es la compatibilidad. El reemplazo de la constante de contracción por una función también permite tener algún grado de libertad con el fin de hacer más amplio el conjunto de todos los pares de funciones que tienen un único punto fijo en común. Con las ideas de las generalizaciones de los teoremas de punto fijo, se propone una modificación sustancial en el teorema 6, usando la condición de Reich como se cita en Klim y Wardowski (2007), al reemplazar la constante de contracción $a \in [0, 1)$, por una función $\alpha : (0, \infty) \to [0, 1)$ tal que,

$$\limsup_{r \to t} \alpha(r) < 1, \quad \forall\, t \in (0, \infty).$$

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

6. REFERENCIAS

Banach, S. (1922, 12). Surles operation dans les ensembles ab- stracts etleur application aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, *3(1)*, 133-181. Descargado de http://eudml.org/doc/213289

Cárdenas, A., y Gutierrez, G. (2008). Una nota sobre el teorema de punto fijo de banach en la solucion de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas. *Scientia Et Technica*, *XIV(40)*, 203-205. Descargado de https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/3103

Dávila, I. (2006). *La teoría del punto fijo para un par de funciones* . [Tesis de Pregrado, Universidad de los Andes, Merida,Venezuela].

Garcia, D. (2020). *Toeoremas del punto fijo y aplicaciones* [Tesis de grado, Universitat de Barcelona]. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona. Descargado de http://hdl.handle.net/2445/164998

Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, *83(4)*, 261-263. Descargado de https://doi.org/10.2307/2318216 doi: 10.2307/2318216

Jungck, G. (1986). Compatible mappings and common fixed points. *Bull. Austral. Math*, *9(4)*, 771-779. Descargado de https://doi.org/10.1155/S0161171286000935 doi: 10.1155/S0161171286000935

Khan, M., Swaleh, M., y Sessa, S. (1984). Fixed point theorem by altering distances between the points. *Internat. J. Math. and Math. Sci*, *30*, 1-9. Descargado de https://doi.org/10.1017/S0004972700001659 doi: 10.1017/S0004972700001659

Klim, D., y Wardowski, D. (2007). Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces. *Mathematical Analysis and Aplications*, *334 (1)*, 132-139. Descargado de https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.12.012 doi: 10.1016/j.jmaa.2006.12.012

Koierngi, M., Rohen., Y., y Verma, R. (2018). Some common fixed point theorems for two pairs of weak compatible mappings of type (a) in gb-metric space. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, *6 (4)*, 135-140. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/326800117_Some_Common_Fixed_Point_Theorems_for_Two_Pairs_of_Weak_Compatible_Mappings_of_Type_A_in_Gb-metric_Space

Morales, J. R., y Rojas, E. M. (2012a). Some fixed point theorems by altering distance functions. *Palestine Journal of Mathematics*, *1(2)*, 111–116. Descargado de https://pjm.ppu.edu/paper/24

Morales, J. R., y Rojas, E. M. (2012b). Some generalizations of jungck's fixed point theorem. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, *2012*, 1-19. Descargado de `https://doi.org/10.1155/2012/213876` doi: 10.1155/2012/213876

Pata, V. (2019). *Fixed point theorems and applications.* Cham, Switzerland: Springer, Cham.

Rakotch, E. (1962). A note on contractive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc*, *13*, 459-465. Descargado de `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0148046-1` doi: 10.1090/S0002-9939-1962-0148046-1

Rhoades, B., Khan, M., y Khan, M. (1984). Some fixed point theorems for hardy-rogers type mappings. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *7(1)*, 75-87. Descargado de `https://doi.org/10.1155/S0161171284000077` doi: 10.1155/S0161171284000077

Vandana, C. (2017). A brief study of fixed point theorem. *International Journal of Applied Sciences*, *4*, 1-3.

Vujaković, J., Ljajko, E., Radojević, S., y Radenović, S. (2020). On some new jungck–fisher–wardowski type fixed point results. *Symmetry*, *12(12*, 2048-2057. Descargado de `https://doi.org/10.3390/sym12122048` doi: 10.3390/sym12122048

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	**Contribución**
Edwin Loor Andrade	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo.
Wilmer Barrera Yayes	Metodología, revisión y diseño del artículo.