UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 153 -165). Edición Contínua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4107

Ciencias Matemáticas

CONDICIONES SUFICIENTES PARA OPERADORES ASOCIADOS AL OPERADOR DE CAUCHY−RIEMANN EN LOS BI−CUATERNIONES

Luis Alfredo Párraga Pincay [1*], Eusebio Alberto Ariza García [2].

[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: lparraga9287@utm.edu.ec
[2] Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: eariza@yachaytech.edu.ec

*Autor para correspondencia: lparraga9287@utm.edu.ec

Recibido: 21−10−2021 / Aceptado:13−12−2022 / Publicación:27−12−2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas.

RESUMEN

El método de los espacios asociados es una herramienta útil para estudiar algunos problemas de valor inicial. El desarrollo del presente trabajo tuvo como objetivo principal determinar las condiciones suficientes para que un par de operadores diferenciales sean asociados, uno de los cuales es el operador de Cauchy−Riemann generalizado, todo esto en el contexto de los cuaterniones complejos; estas condiciones, junto con un estimado interior conveniente para las derivadas de primer orden de funciones regulares generalizadas en los cuaterniones complejos, permiten resolver un problema de Cauchy−Kovalevskaya en un dominio cónico de $\mathbb{R}^4$, con respecto a una norma pesada en un espacio de Banach adecuado.

Palabras clave: Espacios Asociados, Estimados Interiores, Operador de Cauchy−Riemann, Bi−cuaterniones.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR OPERATORS ASSOCIATED TO THE CAUCHY−RIEMANN OPERATOR IN BI−QUATERNIONS

ABSTRACT

The method of associated spaces is a useful tool for studying some initial value problems. The main objective of the development of this work was to determine the sufficient conditions for a pair of differential operators to be associated, one of which is the generalized Cauchy−Riemann operator, all this in the context of complex quaternions; these conditions, together with a convenient interior estimate for the first-order derivatives of generalized regular functions on the complex quaternions, allow us to solve a Cauchy−Kovalevskaya problem in a conic domain of $\mathbb{R}^4$, with with respect to a heavy norm in a suitable Banach space.

Keywords: Associated Spaces, Cauchy−Riemann Operator, Interior Estimates, Bi−quaternions.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA OPERADORES ASSOCIADOS AO OPERADOR CAUCHY−RIEMANN EM BI−QUATÉRNIOS

RESUMO

O método dos espaços associados é uma ferramenta útil para estudar alguns problemas de valor inicial. O principal objetivo do desenvolvimento deste trabalho foi determinar as condições suficientes para que um par de operadores diferenciais seja associado, sendo um deles o operador generalizado de Cauchy−Riemann, tudo isso no contexto de quatérnios complexos; essas condições, juntamente com uma estimativa interna conveniente para as derivadas de primeira ordem de funções regulares generalizadas nos quatérnios complexos, nos permitem resolver um problema de Cauchy−Kovalevskaya em um domínio cônico de $\mathbb{R}^4$, com respeito a uma norma pesada em um espaço de Banach adequado.

Palavras chave: Espaços Associados, Estimativas de Interiores, Operador Cauchy−Riemann, Bi−quatérnios.

Citación sugerida: Párraga, L., Ariza, E. (2022). Condiciones suficientes para operadores asociados al operador de Cauchy−Riemann en los Bi−cuaterniones. Revista Bases de la Ciencia, 7(Especial) , 153-165. DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4107

1. INTRODUCCIÓN

El método de espacios asociados y estimados interiores se ha usado en varios contextos, como los números complejos, los cuaterniones reales y álgebras de Clifford, para resolver problemas de valores iniciales como el siguiente:

$$\partial_t u = \mathcal{F}\left(t, x, u, \partial_0 u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u\right), \tag{1.1}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

donde t es la variable temporal, x es la variable espacial, u es la función incógnita, que depende de x y t, y $\mathcal{F}$ depende de $t,\ x,\ u$ y sus primeras derivadas parciales. Ver Abbas e Yüksel (2015); Ariza y Di Teodoro (2014); Ariza, Vanegas y Vargas (2016); Ariza, E., Bolívar, Y., Mármol, L. y Vanegas, J. (2015); Asano y Tutschke (2002); Tutschke (2004); Tutschke (2008); Yüksel (2013).

El problema $(1.1)-(1.2)$ puede escribirse como

$$u(t,x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}\left(\tau, x, u, \partial_0 u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u\right) d\tau, \tag{1.3}$$

por lo que las soluciones del problema de valor inicial $(1.1)-(1.2)$ son puntos fijos del operador integro$-$diferencial asociado:

$$Tu(x,t) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}\left(\tau, x, u, \partial_0 u, \partial_1 u, \ldots, \partial_3 u\right) d\tau, \tag{1.4}$$

y vice$-$versa.
En este trabajo se dan las condiciones suficientes para que el operador

$$\mathcal{F}u(x,t) := \sum_{i=0}^{3} A^{(i)}(x,t)\partial_i u + B(x,t)u + C(x,t)$$

y el operador de Cauchy$-$Riemann generalizado,

$$D = \sum_{j=0}^{3} i_j \partial_j,$$

sean asociados, en el contexto de los bi$-$cuaterniones. Esto permite garantizar que el problema de valor inicial $(1.1)-(1.2)$ es soluble en el espacio de funciones regulares generalizadas $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ bajo el método de espacios asociados y estimados interiores, siempre que se cumplan las siguientes condiciones (ver Tutschke (1997)):

- $\mathcal{F}$ es asociado a D.
- La función inicial φ es una funcion regular generalizada.
- Los elementos del espacio asociado satisfacen un estimado interior de primer orden de tipo

$$\|\partial_j u\|_{\Omega'} \leq \frac{\text{const}}{\text{dist}\left(\Omega', \partial\Omega''\right)} \|u\|_{\Omega''}.$$

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se muestran algunos preliminares, introduciendo el concepto de operadores asociados, espacios asociados, bi$-$cuaterniones, funciones regulares generalizadas y estimados interiores. La sección 3 está dedicada a obtener las condiciones suficientes para el par de operadores asociados $\mathcal{F}$ and D. La sección 4 se dan algunas conclusiones.

2. DESARROLLO

En esta sección se presentan los principales conceptos usados en este trabajo.

2.1. Operadores Asociados y Espacios Asociados

Definición 2.1. *Sea Ω un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, u definida en Ω y $\mathcal{F}$ un operador diferencial de primer orden dependiendo de t, x, u y $\partial_i u$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, mientras que $\mathcal{G}$ es un operador diferencial con respecto a las variables espaciales x_i, cuyos coeficientes no dependen de t. Se dice entonces, que $\mathcal{F}$ es* **asociado** *a $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ mapea todas las soluciones de la ecuacion diferencial $\mathcal{G}u = 0$ en soluciones de esa misma ecuación, para un t elegido fijamente, i.e.,*

$$\mathcal{G}u = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}u) = 0. \tag{2.1}$$

El espacio $\mathcal{X}$ conteniendo todas las soluciones para le ecuación diferencial $\mathcal{G}u = 0$ es llamado un **espacio asociado** *de $\mathcal{F}$.*

Ejemplo 2.1. *Uno de los ejemplos más simples es el espacio de funciones holomorfas. Este es un espacio asociado al operador diferenciación compleja $\mathcal{G} = \dfrac{d}{dz}$. Esto es así debido a que la derivada compleja de una función holomorfa es nuevamente una función holomorfa.*

2.2. Bi$-$cuaterniones

Se denotará a $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ como el conjunto de cuaterniones reales y **cuaterniones complejos** (también llamados **bi$-$cuaterniones**), respectivamente. El presente trabajo está centrado en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Definición 2.2. *Cada elemento a es representado por $a = \sum_{j=0}^{3} a_j i_j$, donde $a_j \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$, y $a_j \in \mathbb{C}$ si $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, siendo $j = 0, 1, 2, 3$. El elemento $i_0 = 1$ es el elemento identidad, mientras que i_1, i_2, i_3 son las unidades imaginarias cuaterniónicas, satisfaciendo las propiedades:*

$$i_0^2 = i_0 = -i_j^2, \quad i_0 \cdot i_j = i_j \cdot i_0 = i_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$i_1 \cdot i_2 = -i_2 \cdot i_1 = i_3, \quad i_2 \cdot i_3 = -i_3 \cdot i_2 = i_1, \quad i_3 \cdot i_1 = -i_1 \cdot i_3 = i_2.$$

Si se denota a i como la unidad imaginaria compleja, como usualmente se lo hace, entonces pedimos que

$$i_j \cdot i = i \cdot i_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Es decir, la unidad imaginaria compleja i conmuta con las unidades imaginarias cuaterniónicas i_1, i_2, i_3. Algunas veces, el producto anterior se suele suponer como anti$-$conmutativo para $j = 1, 2, 3$. En este caso, el álgebra que se obtiene es la de los **octoniones** o números de Cayley. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ y el álgebra de los Octoniones son isomorfos como espacios vectoriales, sin embargo, no lo son como álgebras. Por un lado, $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ es un álgebra asociativa con divisores de cero. Por otro lado, el álgebra de los Octoniones es un álgebra de división no asociativa, i.e., cada octonión distinto de cero es invertible. Para conocer más obre los Octoniones, remitimos al lector a Dixon (2013); Kantor y Solodovnikov (1989); Thaller (2013); Tze (1996); Ward (2012).

Ejemplo 2.2. *Considere, en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, los números $p = 1 + ii_1$ y $q = 1 - ii_1$. Entonces $p \cdot q = 0$ implicando que p y q son divisores de cero.*

Tenga en cuenta que $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ se puede reescribir de la forma $a = Re(a) + iIm(a)$, donde

$$Re(a) = \sum_{j=0}^{3} Re(a_j)i_j \text{ e } Im(a) = \sum_{j=0}^{3} Im(a_j)i_j$$

son elementos de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Esta es una posible representación para elementos en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Otra representación posible es $a = a_0 + \vec{a}$, donde a_0 es llamada la **la parte escalar** y $\vec{a}$ es la **parte vectorial** de a.
Estas representaciones conducen a las siguientes conjugaciones:

(i) **Conjugación Compleja**, definida por $a^* = Re(a) - iIm(a)$, y

(ii) **Conjugación Cuaterniónica**, dada por $\overline{a} = a_0 - \vec{a}$.

No es difícil ver que la Conjugación Cuaterniónica es un anti$-$automorfismo, i.e., dados $a, b \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$,

$$\overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

Considemos el conjunto de divisores de cero en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ definido por

$$\mathfrak{G} = \{a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})\, |a \neq 0 \,\text{and}\, \exists\, b \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \text{ with } b \neq 0 \text{ and } a \cdot b = 0\}.$$

Claramente, si $a \in \mathfrak{G}$, entonces a^{-1} no existe. Una caracterización del conjunto $\mathfrak{G}$ es lo siguiente (ver V. Kravchenko y Shapiro (1996); V. V. Kravchenko (2003)):

Proposición 2.3. *(Caracterización de divisores de cero) Sea $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ con $a \neq 0$. Los siguientes son equivalentes:*

(1) $a \in \mathfrak{G}$.

(2) $a \cdot \overline{a} = 0$.

(3) $a_0^2 = \vec{a}^2$.

(4) $a^2 = 2a_0 a = 2\vec{a}a$.

Observación 2.1. *Note que $a \cdot \overline{a} \neq 0$ implica $a \notin \mathfrak{G} \cup \{0\}$, i.e., a es invertible. Más aún,*

$$a^{-1} = \overline{a}/(a \cdot \overline{a}).$$

2.3. Norma Bi$-$cuaterniónica

Dado el bi$-$cuaternión $q = \sum_{k=0}^{3} q_k i_k$, se define a la **norma bi$-$quaterniónica** como

$$|q|_c = \sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2},$$

donde $|q_k|^2 = q_k q_k^*$ and q_k^* es la conjugación compleja usual.

Observación 2.2. *Tome en cuenta que esta es la norma usual en $\mathbb{R}^8$ y se puede reescribir de la forma*

$$|q|_c^2 = |Re(q)|^2 + |Im(q)|^2 = Sc\,(q \cdot \overline{q}^*) = Sc\,(\overline{q}^* \cdot q)\,,$$

siendo $Sc\,(a)$ la parte escalar a y $Sc\,(a \cdot b) = Sc\,(b \cdot a)$. En particular, si $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$, $Im(q) = 0$, entonces se tiene que $|p|_c = |p|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^4$.

Un calculo sencillo prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea* $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, *entonces*

$$|p \cdot q|_c \leq \sqrt{2}\, |p|_c \cdot |q|_c\,. \tag{2.2}$$

Este resultado es una estimación muy importante. Además, (2.2) implica que $|p \cdot q|_c \neq |p|_c\, |q|_c$. Es más, $|p|_c\, |q|_c$ puede ser estricatamente mayor que $|p \cdot q|_c$. Considere, por ejemplo, p y q como en el ejemplo 2.2. En este caso, $|p \cdot q|_c = 0$, mientras que $|p|_c\, |q|_c = 2$.

Prueba. Sean p, q elementos en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.
Denotamos

$$\begin{array}{lcl} a := \text{Re}(p) & , & b := \text{Im}(p), \\ c := \text{Re}(q) & \text{y} & d := \text{Im}(q). \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |p \cdot q|^2 &= |(a + ib)\,(c + id)|^2 \\ &= |a \cdot c - b \cdot d + i\,(a \cdot d + b \cdot c)|^2 \\ &= |a \cdot c - b \cdot d|^2 + |a \cdot d + b \cdot c|^2 \quad \text{Por la obs. 2.2} \\ &\leq (|a \cdot c| + |b \cdot d|)^2 + (|a \cdot d| + |b \cdot c|)^2 \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es válida debido a la desigualdad triangular en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.
Como, además, se cumple la desigualdad

$$(x + y)^2 \leq 2\,(x^2 + y^2)\,, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned} |p \cdot q|^2 &\leq 2\left(|a \cdot c|^2 + |b \cdot d|^2 + |a \cdot d|^2 + |b \cdot c|^2\right) \\ &= 2\left(|a|^2 + |b|^2\right) \cdot \left(|c|^2 + |d|^2\right) \\ &= 2\,|p|^2 \cdot |q|^2 \end{aligned}$$

□

2.4. Operador de Cauchy−Riemann y Funciones Regulares

Estaremos interesados en funciones

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

es decir, funciones con valores en los cuaterniones complejos definidas en $\mathbb{R}^4$.
Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^4$. El **operador de Cauchy−Riemann en** $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ está definido por

$$D = \sum_{j=0}^{3} i_j \partial_j, \tag{2.3}$$

donde $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Su **conjugado** viene dado por $\overline{D} = \partial_0 - \sum_{j=1}^{3} i_j \partial_j$.

Definición 2.5. *Una función* $f \in C^1\,(\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *que satisface la ecuación* $D\,[f] = 0$ *en* Ω *es llamada una función* **regular (a izquierda) en** Ω. *Si* f *satisface* $\overline{D}\,[f] = 0$ *en* Ω, *se dice entonces que* f *es una función* **anti−regular (a izquierda) en** Ω.

Tomando al Operador de Laplace $\Delta = \partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, es fácil ver que

$$D \cdot \overline{D} = \overline{D} \cdot D = \Delta. \tag{2.4}$$

Entonces, cualquier función regular o anti$-$regular en Ω es armónica en Ω. Un resultado importante es la siguiente regla de Leibniz:

Proposición 2.6. *Sean $g \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ y $f \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{C})$. Entonces,*

$$D[f \cdot g] = f \cdot D[g] + D[f] \cdot g = D[g] \cdot f + D[f] \cdot g. \tag{2.5}$$

Observación 2.3. *Definiendo $D_r[f] = [f]D = \sum_{j=0}^{3} \partial_j f \cdot i_j$, es fácil ver que*

$$D_r[f \cdot g] = g \cdot D_r[f] + D_r[g] \cdot f = g \cdot D_r[f] + f \cdot D_r[g]. \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.3. *Sea $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^4$ que será representado de la forma $x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$. La función*

$$\theta(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|x|_c^2} = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|x|^2}, \tag{2.7}$$

es tal que

$$\partial_j^2\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{|x|^4} - 4\frac{x_j^2}{|x|^6}\right), \text{ para } j = 0, 1, 2, 3.$$

Por lo tanto, $\Delta\theta(x) = 0$. Esto y (2.4) *implica que las funciones*

$$k(x) = \overline{D}[\theta(x)] = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\overline{x}}{|x|^4} \text{ y } \overline{k}(x) = D[\theta(x)] \tag{2.8}$$

satisfacen las ecuaciones $Dk(x) = 0$ y $\overline{D}\,\overline{k}(x) = 0$, respectivamente.

Ahora se mostrará la Regla del Producto para cualquier par de funciones $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ siendo D el operador de Cauchy$-$Riemann, el cual se usará más adelante.

Lema 2.7. *Sea $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ y sea $D = \sum_{j=0}^{3} \partial_j e_j$ el operador de Cauchy$-$Riemann, entonces*

$$D(u \cdot v) = Du \cdot v + \overline{u} \cdot Dv + 2\left[\sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v - \sum_{k=1}^{3} u_k \partial_k v\right] \tag{2.9}$$

Prueba. Por un lado, debido a la definición, se tiene

$$\begin{aligned}
D(u \cdot v) &= \sum_{i=0}^{3} e_i \partial_i (u \cdot v) \\
&= \sum_{i=0}^{3} e_i (\partial_i u \cdot v + u \cdot \partial_i v) \\
&= \sum_{i=0}^{3} e_i \cdot \partial_i u \cdot v + \sum_{i=0}^{3} e_i \cdot u \cdot \partial_i v \\
&= Du \cdot v + \sum_{i=0}^{3} e_i \cdot u \cdot \partial_i v.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3} e_i \cdot u \cdot \partial_i v &= \sum_{i=0}^{3} e_i \cdot \left(u_0 + \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \right) \cdot \partial_i v \\
&= \sum_{i=0}^{3} u_0 e_i \cdot \partial_i v + \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_i \cdot e_k \cdot \partial_i v \\
&= u_0 \cdot Dv + e_0 \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_i \cdot e_k \cdot \partial_i v \\
&= u_0 \cdot Dv + \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v + \sum_{k=1}^{3} u_k e_k^2 \cdot \partial_k v \\
&\quad + \sum_{i \neq k}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_i \cdot e_k \cdot \partial_i v.
\end{aligned}
$$

Como, además,

$$
\sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v = 2 \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v - \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v
$$

y

$$
\sum_{k=1}^{3} u_k e_k^2 \cdot \partial_k v = \sum_{k=1}^{3} u_k e_k^2 \cdot \partial_k v - 2 \sum_{k=1}^{3} u_k \cdot \partial_k v,
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3} e_i \cdot u \cdot \partial_i v = & u_0 \cdot Dv + 2 \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v - \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v \\
& \sum_{k=1}^{3} u_k e_k^2 \cdot \partial_k v - 2 \sum_{k=1}^{3} u_k \cdot \partial_k v \\
& - \sum_{i \neq k}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot e_i \cdot \partial_i v.
\end{aligned}
$$

Finalmente, debido a que

$$
\begin{aligned}
u_0 \cdot Dv - \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v + \sum_{k=1}^{3} u_k e_k^2 \cdot \partial_k v - \sum_{i \neq k}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot e_i \cdot \partial_i v \\
= u_0 \cdot Dv - \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v - \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot e_i \cdot \partial_i v \\
= u_0 \cdot Dv - \sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot Dv \\
= \overline{u} \cdot Dv,
\end{aligned}
$$

se ve que

$$
\sum_{i=0}^{3} e_i \cdot u \cdot \partial_i v = \overline{u} \cdot Dv + 2 \left[\sum_{k=1}^{3} u_k e_k \cdot \partial_0 v - \sum_{k=1}^{3} u_k \partial_k v \right],
$$

lo que concluye la demostración.

$\square$

2.5. Estimados Interiores de primer orden

Dada una función definida en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un estimado interior (ver Ariza, E. (2014); Ariza, E., Bolívar, Y., Mármol, L. y Vanegas, J. (2015)) es un estimado para las derivadas de la función dada, que es válido en un sub$-$dominio de Ω cuya distancia hasta la frontera de Ω es positiva. Un estimado interior, entonces, describe el comportamiento de las derivadas de la función cerca de la frontera de Ω. Formalmente, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.8. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{B}(\Omega)$ un espacio de Banach de funciones definidas en Ω. Supóngase que Ω' es un sub$-$dominio de Ω tal que la $dist(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Si u es una función dada en Ω, un estimado de la forma*

$$\|\partial_{x_j} u\|_{\Omega'} \leq \frac{C}{dist(\Omega', \partial\Omega)} \|u\|_{\Omega}, \tag{2.10}$$

es llamado un **estimado interior de primer orden***, siendo C una constante que no depende de u ni de Ω', y $\|\cdot\|_{\Omega}$ es la norma en $\mathcal{B}(\Omega)$. Ver Tutschke (1997).*

Ejemplo 2.4. *Como ejemplo, considere una función holomorfa Φ en un dominio acotado Ω, y continua en $\overline{\Omega}$. Por la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene*

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \delta} \frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

donde z es un punto interior de Ω y $\delta < dist(z, \partial\Omega)$. De esta fórmula se tiene

$$\|\Phi'\|_{\Omega'} \leq \frac{1}{dist\,(\Omega', \partial\Omega)} \|\Phi\|_{\Omega},$$

donde la norma que aparece es la norma del supremo.

3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA OPERADORES D Y $\mathcal{F}$

Sea $\mathcal{F}$ el operador diferencial dado por

$$\mathcal{F}u(x,t) := \sum_{i=0}^{3} A^{(i)}(x,t)\partial_i u + B(x,t)u + C(x,t), \tag{3.1}$$

donde

$$A^{(i)}(x,t) = \sum_{k=0}^{3} a_k^{(i)}(x,t)e_k, \text{ para } i = 0,1,2,3,$$

$$B(x,t) = \sum_{k=0}^{3} b_k(x,t)e_k, \quad C(x,t) = \sum_{k=0}^{3} c_k(x,t)e_k,$$

$a_k^{(i)}(x,t),\ b_k(x,t)$ y $c_k(x,t)$, para $i,k = 0,1,2,3$, son funciones a valores complejos. Queremos encontrar condiciones suficientes sobre los coeficientes de $\mathcal{F}$, de manera que $\mathcal{F}$ sea asociado a D. Es decir, que dada una función regular u (i.e., $Du = 0$), queremos hallar condiciones suficientes sobre los coeficientes de $\mathcal{F}$, tal que $D\,(\mathcal{F}u) = 0$.

Para ello, primero se debe tener en cuenta que, dado que $Du = 0$,

$$\partial_0 u = -\sum_{j=1}^{3} e_j \partial_j u,$$

$$\partial_k \partial_0 u = -\sum_{j=1}^{3} e_j \partial_k \partial_j u, \text{ for } k = 1,2,3,$$

y

$$\partial_0^2 u = -\sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 u.$$

Tenga en cuenta además

$$A^{(i)}(x,t) - \overline{A^{(i)}}(x,t) = 2\sum_{k=1}^{3} a_k^{(i)}(x,t)e_k, \quad \text{para} \quad i = 0,1,2,3, \tag{3.2}$$

y

$$B(x,t) - \overline{B}(x,t) = 2\sum_{k=1}^{3} b_k(x,t)e_k. \tag{3.3}$$

De

$$D\left(\mathcal{F}u\right) = \sum_{i=0}^{3} D\left(A^{(i)} \cdot \partial_i u\right) + D\left(B \cdot u\right) + DC,$$

vemos entonces que

$$D\left(\mathcal{F}u\right) = D\left(A^{(0)} \cdot \partial_0 u\right) + \sum_{i=1}^{3} D\left(A^{(i)} \cdot \partial_i u\right) + D\left(B \cdot u\right) + DC. \tag{3.4}$$

Por la regla del producto (2.9), se obtiene

$$\begin{aligned}
D\left(B \cdot u\right) &= DB \cdot u + \overline{B} \cdot Du + 2\sum_{k=1}^{3} b_k e_k \partial_0 u - 2\sum_{k=1}^{3} b_k \partial_k u \\
&= DB \cdot u + \left(\overline{B} - B\right)\sum_{j=1}^{3} e_j \partial_j u - 2\sum_{k=1}^{3} b_k \partial_k u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\left(A^{(0)} \cdot \partial_0 u\right) = \; & DA^{(0)} \cdot \partial_0 u + \overline{A^{(0)}} \cdot D(\partial_0 u) \\
& + 2\left[\sum_{k=1}^{3} a_k^{(0)} e_k \partial_0^2 u - \sum_{k=1}^{3} a_k^{(0)} \partial_k \partial_0 u\right] \\
= \; & DA^{(0)} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3} e_j \partial_j u\right) + \overline{A^{(0)}} \cdot \partial_0 (Du) \\
& + 2\sum_{k=1}^{3} a_k^{(0)} e_k \left[-\sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 u\right] - 2\sum_{k=1}^{3} a_k^{(0)} \left[-\sum_{j=1}^{3} e_j \partial_k \partial_j u\right] \\
= \; & -DA^{(0)} \cdot \sum_{j=1}^{3} e_j \partial_j u + 2\sum_{j,k=1}^{3} a_k^{(0)} e_j \partial_k \partial_j u \\
& + \left(\overline{A^{(0)}} - A^{(0)}\right) \cdot \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 u
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} D\left(A^{(i)}\cdot\partial_i u\right) = & \sum_{i=1}^{3}\left[DA^{(i)}\cdot\partial_i u+\overline{A^{(i)}}\cdot D\left(\partial_i u\right)+2\left\{\sum_{k=1}^{3} a_k^{(i)} e_k\partial_0\partial_i u\right.\right.\\
&\left.\left.-\sum_{k=1}^{3} a_k^{(i)}\partial_k\partial_i u\right\}\right]\\
= & \sum_{i=1}^{3} DA^{(i)}\cdot\partial_i u+\sum_{i=1}^{3}\overline{A^{(i)}}\cdot\partial_i\left(Du\right)\\
& +\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{3} a_k^{(i)} e_k\right)\partial_i\left(\partial_0 u\right)\right\}-2\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_k^{(i)}\partial_k\partial_i u\\
= & \sum_{i=1}^{3} DA^{(i)}\cdot\partial_i u-2\sum_{i,k=1}^{3} a_k^{(i)}\partial_k\partial_i u\\
& +\sum_{i=1}^{3}\left\{-\left(\overline{A^{(i)}}-A^{(i)}\right)\partial_i\left(-\sum_{k=1}^{3}\partial_k e_k u\right)\right\}\\
= & \sum_{i=1}^{3} DA^{(i)}\cdot\partial_i u-2\sum_{i,k=1}^{3} a_k^{(i)}\partial_k\partial_i u\\
& +\sum_{i,k=1}^{3}\left(\overline{A^{(i)}}-A^{(i)}\right)\cdot e_k\partial_i\partial_k u.
\end{aligned}
$$

Lo que conduce finalmente a que

$$
D\left(\mathcal{F}u\right)=\sum_{m=1}^{3} W_m\cdot\partial_m^2 u+\sum_{\substack{m,l=1\\ m\neq l}}^{3} X_{ml}\cdot\partial_m\partial_l u+\sum_{m=1}^{3} Y_m\cdot\partial_m u+Z\cdot u+DC,
$$

donde

$$
W_m=\left(\overline{A^{(0)}}-A^{(0)}\right)+\left(\overline{A^{(m)}}-A^{(m)}\right)e_m+2a_m^{(0)}e_m-2a_m^{(m)},
$$

$$
X_{ml}=\left(\overline{A^{(m)}}-A^{(m)}\right)e_l+\left(\overline{A^{(l)}}-A^{(l)}\right)e_m+2\left(a_m^{(0)}e_l+a_l^{(0)}e_m\right)-2\left(a_l^{(m)}+a_m^{(l)}\right),
$$

$$
Y_m=D\left(A^{(m)}-A^{(0)}e_m\right)+\left(\overline{B}-B\right)e_m-2b_m
$$

y

$$
Z=DB
$$

Por lo que hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *El operador $\mathcal{F}$ es asociado a D si*

$$
DC=W_m=X_{ml}=Y_m=Z=0.
$$

4. CONCLUSIONES

- En este trabajo se hallaron condiciones suficientes para que el operador $\mathcal{F}$, definido por (3.1), sea asociado al operador de Cauchy$-$Riemann generalizado dado por (2.3), en el contexto del álgebra de los cuaterniones complejos. Esto, junto con un estimado interior de la forma (2.10), permite garantizar, usando el método de espacios asociados y estimados interiores, que el problema de valor inicial (1.1)$-$(1.2) tiene solución única en dominios cónicos. Ver Tutschke (1997).

- Como trabajos futuros, que complementen el presente, se espera realizar el hallazgo de las condiciones necesarias para que este par de operadores sean asociados. Además, es de interés hacer un estudio similar para operadores más generales al descrito en este trabajo, como lo son el operador de Cauchy-Riemann generalizado $D_\lambda = D - \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, así como operadores con coeficientes distintos de uno y, posiblemente, variables.

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

6. REFERENCIAS

Abbas, U. Y. e Yüksel, U. (2015). Necessary and sufficient conditions for first order differential operators to be associated with a disturbed Dirac operator in quaternionic analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *25*(1), 1-12.

Ariza, E. y Di Teodoro, A. (2014). PROBLEMAS DE VALORES INICIALES Y REPRESENTACIONES INTEGRALES EN ANALISIS DE CLIFFORD. *Acta Científica Venezolana*, *65*(4), 225-233.

Ariza, E., Vanegas, J. y Vargas, F. (2016). First order differential operators associated to the space of monogenic functions in parameter-depending Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *26*(1), 13-29.

Ariza, E. (2014). *Espacios asociados en álgebras tipo Clifford con saltos* (Tesis Doctoral). Coordinación de Postgrado en Matemáticas. Universidad Simón Bolívar.

Ariza, E., Bolívar, Y., Mármol, L. y Vanegas, J. (2015). Interior L p-estimates for functions in Clifford type algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *25*(2), 271-282.

Asano, K. y Tutschke, W. (2002). An extended Cauchy-Kovalevskaya problem and its solution in associated spaces. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, *21*(4), 1055-1060.

Dixon, G. M. (2013). Division Algebras: Octonions Quaternions Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. *Springer Science & Business Media.*, *290*.

Kantor, I. L. y Solodovnikov, A. S. (1989). Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras. *Springer*.

Kravchenko, V. y Shapiro, M. (1996). Integral representations for spatial models of mathematical physics. *CRC Press.*, *351*.

Kravchenko, V. V. (2003). Applied quaternionic analysis. *Heldermann.*, *28*.

Thaller, B. (2013). The Dirac equation. *Springer Science & Business Media.*

Tutschke, W. (1997). Interior estimates in the theory of partial differential equations and their application to initial value problems.

Tutschke, W. (2004). Associated partial differential operators–applications to well-and ill-posed problems. *Abstract and applied analysis*, 373-383.

Tutschke, W. (2008). Associated spaces-a new tool of real and complex analysis. *Function spaces in complex and Clifford analysis* (pp. 253-268). National University Publishers Hanoi.

Tze, C. H. (1996). On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. *World Scientific*.

Ward, J. P. (2012). Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications. *Springer Science & Business Media.*, *403*.

Yüksel, U. (2013). Necessary and sufficient conditions for associated differential operators in quaternionic analysis and applications to initial value problems. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *23*(4), 981-990.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autores	**Contribución**
Luis Alfredo Párraga Pincay	Metodología aplicada, desarrollo de cuentas, diseño y escritura del artículo, resultados en general.
Eusebio Alberto Ariza García	Revisión del desarrollo de las cuentas, guía para el implemento de las aportaciones bibliográficas, extrategias en la resolución del diseño investigativo.