UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No 3, Septiembre/Diciembre, 2022, Ecuador (p. 31-40). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7i3.4195

Ciencias Matemáticas

OPERADORES CASILLENOS

Edixo Rosales

Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias, Maracaibo, Venezuela. E-mail: edixorosales@gmail.com

*Autor para la correspondencia: edixorosales@gmail.com

Recibido: 30-11-2021 / Aceptado: 12-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Luis Bladismir Ruiz Leal

RESUMEN

Este trabajo presenta resultados sobre operadores casillenos con la finalidad de caracterizar operadores llenos, cuando existe un operador casilleno en su álgebra de invariantes; como también estudiarlos en su relación con el rango numérico esencial de un operador sobre un espacio de Banach reflexivo. En la metodología se siguen las técnicas de J. A. Erdos, las cuales permiten deducir cuando un operador invertible es lleno, a partir de la condición de ser lleno y compacto un operador del álgebra débil por él generada; las de J. Bravo dada a través de las filtraciones de las imágenes iteradas de un subespacio invariante de un operador y las de S. Karanasios, quien a través de las propiedades del rango numérico espacial de operadores definidos en espacios de Banach uniformemente convexos, caracteriza los operadores llenos. Algunos resultados permitirán determinar del rango numérico esencial de un operador, su propiedad de ser casilleno.

Palabras clave: Operadores casillenos, rango numérico esencial, operadores llenos, operadores compactos.

ALMOST FULL OPERATORS

ABSTRACT

This work presents results on almost full operators in order to characterize full operators, when there is an almost full operator in its algebra of invariants; as well as studying them in their relationship with the essential numerical range of an operator on a reflexive Banach space. In the methodology, we have used the J. A. Erdos, which let us deduce when an invertible operator is full, if there is compact and full operator belonging to the weak algebra generated by invertible operator. We also make use of J. A. Bravo and S. Karanasios techniques. The firs author studies filtrations of iterated images in an invariant subspace of some operator with special properties. On the other hand, the second author characterizes full operators in uniformly convex Banach spaces by means of its spatial numerical range property.

Keys word: Almost full operators, essential number range, full operator, compact operator.

OPERADORES QUASE COMPLETOS

RESUMO

Este artigo apresenta resultados sobre operadores quase cheios para caracterizar operadores cheios, quando há um operador quase cheios em sua álgebra de invariantes; como também estudá-los em sua relação com o posto numérico essencial de um operador em um espaço de Banach reflexivo. Na metodologia, são seguidas as técnicas de J. A. Erdos, que permitem deduzir quando um operador invertível é cheio, a partir da condição de que um operador da álgebra fraca gerada por ele seja cheio e compacto; as de J. Bravo dadas através das filtrações das imagens iteradas de um subespaço invariante de um operador e as de S. Karanasios, que através das propriedades da gama numérica espacial de operadores definidos em espaços de Banach uniformemente convexos, caracteriza os operadores completos. Alguns resultados permitirão determinar o posto numérica essencial de um operador, sua propriedade de estar quase preenchido.

Palavras chave: Operadores quase cheios, posto numérico esencial, operadores cheios, operadores compactos.

Citación sugerida: Rosales, E. (2022). Operadores casillenos. *Revista Bases de la Ciencia*, *7*(3), 31-40. https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7i3.4195

1. INTRODUCCIÓN

El matemático J. A. Erdos ha sido uno de los pioneros del estudio de los Operadores Casillenos y su definición aparece por primera vez en su artículo: ”Singly generated algebras containing compact operators” (Erdos, 1979b).

El profesor J. A. Erdos caracteriza la regularidad de operadores, en función de la ser lleno un operador que conmuta con él y pertenece al álgebra de los operadores que tienen los mismos invariantes. En el citado paper, el autor deja plasmadas interesantes interrogaciones sobre los operadores casillenos y parte del desarrollo de esta investigación la dedicamos a resolver algunas de dichas preguntas.

Presentamos también casos particulares que caracterizan operadores casillenos, en función del rango numérico esencial de un operador en espacios de Banach reflexivos.

Es importante señalar que los objetivos del artículo son, ver cómo opera el concepto de operador casilleno en las hipótesis de los resultados de Erdos dadas en su artículo “Singly generated algebras containing compact operators”, y también ver cómo lo hace el concepto de rango numérico esencial de un operador para caracterizar operadores casillenos. Karanasios lo había hecho para operadores llenos en función del rango numérico espacial de un operador.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

En este trabajo $\boldsymbol{H}$ denota un espacio de Hilbert separable y $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach en general. La familia de los operadores acotados $T: X \to X$ se denotará mediante $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$**.** Se dice que un subespacio M de X es invariante para T, si $T(M) \subset M$. Por $\boldsymbol{lat}(\boldsymbol{T})$ se entiende la familia de todos los subespacios invariantes par T.

Un $T \in B(X)$ se dirá casilleno, si para todo $M \in lat(T)$ se obtiene que la $dim\frac{M}{T(M)} < +\infty$. Si $\overline{T(M)} = M$ para todo $M \in lat(T)$ el operador se dirá que es lleno. Es claro que los operadores llenos constituyen una subfamilia de los operadores casillenos. En el caso de operadores $T: H \to H$, un operador es casilleno si dim $(M \ominus \overline{T(M)}) < +\infty$.

Una subálgebra importante de $B(X)$ la constituye la familia de los operadores $Alglat(T)$, donde $A \in Alglat(T)$ si $lat(T) \subset lat(A)$. Otra subálgebra que consideraremos es la denotada por $\{T\}'$ y formada por los operadores que conmutan con T.

Un operador $K: X \to X$ se dirá compacto, si dada una sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, existe una subsucesión $\{K(x_{n_k})\}$ en X y un $w \in X$ tales que $K(x_{n_k}) \overset{\|.\|}{\to} w$. Es importante señalar que si $K \in B(H)$ es un operador compacto y $\{e_n\}$ es una sucesión ortonormal, entonces $K(e_n) \overset{\|.\|}{\to} 0$.

Un operador $K: X \to X$ se dirá casinilpotente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = 0$. Un operador $T \in B(H)$ tiene asociado un operador $T^* \in B(H)$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle,\ \forall\ x, y \in H$. El operador $T \in B(H)$ se dirá positivo si $\langle T(x), x\rangle > 0, \forall\ \ x \neq 0$. En caso de que $T \in B(X)$ el operador asociado es $T' \in B(X^*)$ donde $T'(f) = f \circ T, \forall\ f \in X^*$. En ambos casos al operador asociado se le llama adjunto.

Dado un operador $T: X \to X$, por rango numérico esencial del operador T, se entiende el conjunto numérico $W_e(T) = \{f(T): f \in B(X)^*, f(I) = \|f\| = 1\ \text{ con }\ f(K) = 0, \forall\ K\ o\text{perador compacto}\}$.

Finalmente, dado un espacio de Banach X, se dirá que una sucesión $\{x_n\} \subset X$ es una base Schauder, si cada $x \in X$ se escribe de manera única como $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot x_n$. Si el espacio de Banach X es reflexivo, es decir la aplicación $J: X \to X^{**}$ dada por $J(x) = J_x$, donde $J_x(f) = f(x), \forall\ f \in X^*$ es un isomorfismo; entonces toda base de Schauder converge débilmente a cero, es decir $f(x_n) \to 0, \forall\ f \in X^*$. Si una sucesión $\{x_n\} \subset X$ es una base de Schauder para $[x_n]$, el subespacio cerrado generado por los x_n, diremos que $\{x_n\}$ es una sucesión básica. Si $T \in B(X)$ y $x \in X$, escribiremos $[T^n(x)] = \bigvee_{n=0}^{+\infty} T^n(x)$.

El lector puede seguir la teoría básica de los operadores en las referencias Kreyszig (1979) y Schechter (1971). La teoría de las bases de Schauder en Carothers (2007). Para los operadores llenos las referencias Bravo (1980), Erdos (1979a) y Rosales (2020) son de utilidad. Para caracterizaciones de operadores en llenos en función de rangos numéricos Karanasios (1994). Para algunos resultados sobre operadores casillenos Rosales (2012).

3. OPERADORES CASILLENOS

Este resultado fue propuesto por J. A. Erdos en una de sus investigaciones sobre operadores llenos y damos una demostración:

Teorema 1. Si $T \in B(H)$ es invertible y $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ es un operador compacto y casilleno, entonces T es lleno.

Demostración. Supongamos que T no es un operador lleno, entonces existe $M \in lat(T)$ tal que $\dim\left(T^n(M) \ominus T^{n+1}(M)\right) = 1,\ \forall\, n \geq 0$. Por lo tanto, existe un vector unitario $e_n \in T^n(M) \ominus T^{n+1}(M)$. Es claro que $\{e_n\}$ es una familia ortonormal. Vamos a demostrar que, existe un $k \geq 0$, tal que $K(\{e_n\}) \subset T^k(M)$ pero $K(\{e_n\}) \not\subset T^{k+1}(M)$. En efecto, de lo contrario, definimos $N = \bigvee_{n=0}^{+\infty} \bigvee_{m=0}^{+\infty} K^m(e_n)$. Es claro que $N \in lat(K)$ y como $K^m(e_n) \in T^j(M),\ \forall\, j \geq 0$, luego $\langle K^m(e_n), e_J\rangle = 0, \forall\, j \geq 0$. Esto dice que dim $(N \ominus K(N) = +\infty$, lo que contradice que el operador K es casilleno. Realmente es fácil deducir que $K(M) \subset T^k(M)$ pero $K(M) \not\subset T^{k+1}(M)$.

Se tiene que $K \circ T^n(M) = T^n \circ K(M) \subset T^{n+k}(M),\ \forall\, n \geq 0$. Es decir:

$$K(e_n) = \beta_n \cdot e_{n+k} + x_{n+k+1}, \qquad x_{n+k+1} \in K^{n+k+1}(M)\,, \forall\, n \geq 0 \ (1)$$

Por otro lado:

$$T(e_n) = \alpha_n \cdot e_n + y_{n+1}, \qquad x_{n+1} \in T^{n+1}(M), \forall\, n \geq 0 \ (2)$$

Es claro que los $\alpha_n \neq 0, \forall\, n \geq 0$ por la forma en que fueron elegidos los e_n.

Veamos que los $\beta_n \neq 0,\ \forall\, n \geq 0$.

Se tiene que:

$$\langle K \circ T^n(e_n), e_{n+k+1}\rangle = \langle T^n \circ K(e_n), e_{n+k+1}\rangle \Longrightarrow \beta_n \cdot \alpha_{n+k} = \alpha_n \cdot \beta_{n+1} \qquad (3)$$

Si $\beta_0 = 0$, entonces $\alpha_0 \cdot \beta_1 = 0$ y por lo tanto $\beta_1 = 0$. En general se seguiría que $\beta_n = 0$ y por lo tanto que $K(\{e_n\}) \subset T^{k+1}(M)$, lo que contradice la elección de k.

Como K es compacto y $\|K(e_n)\|^2 = |\beta_n|^2 \|e_{n+k}\|^2 + \|x_{n+k+1}\|^2 = |\beta_n|^2 + \|x_{n+k+1}\|^2 \geq |\beta_n|^2$, se deduce que $\lim_{n\to\infty} |\beta_n| = 0$.

Si $k = 0$, entonces por (3) se sigue que $\beta_0 = \beta_n,\ \forall\, n \geq 0$ y por lo anterior que $\beta_0 = 0$, lo que es contradictorio. Esto afirma que $k \geq 1$.

Usando (3) se obtienes las relaciones:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+k} \cdots \alpha_{2k}} \beta_{1+k} = \cdots = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+(r-1)k} \cdots \alpha_{rk}} \beta_{1+(r-1)k} \ (4)$$

Finalmente, como $T(e_n) = \alpha_n \cdot e_{n+1} + y_{n+2}$, deducimos que $e_n = \alpha_n \cdot T^{-1}(e_{n+1}) + T^{-1}(y_{n+2})$ $(T^{-1}(y_{n+2}) \in T^{n+1}(M))$, luego $\langle e_n, e_n \rangle = |\alpha_n| \cdot \langle T^{-1}(e_{n+1}), e_n \rangle \leq |\alpha_n| \cdot \|T^{-1}\|$. De lo anterior resulta la desigualdad $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\alpha_n| \leq \|T\|$. Aplicando esta desigualdad en $(\mathbf{5})$, se obtiene que:

$$|\beta_1| = \left|\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+(r-1)k} \cdots \alpha_{rk}} \beta_{1+(r-1)k}\right| = \left|\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+(r-1)k} \cdots \alpha_{rk}}\right| \cdot \left|\beta_{1+(r-1)k}\right|$$
$$\leq \|T\|^k \cdot \|T^{-1}\|^{k+1} \cdot \left|\beta_{1+(r-1)k}\right| \to 0$$

Esto dice que $\beta_1 = 0$, lo que es nuevamente contradictorio. Se deduce el resultado.■

El siguiente resultado nos pertenece y se prueba usando los argumentos dados en Erdos (1979) con algunas variantes:

Teorema 2. Si $K \in B(H)$ es un operador tal que $K = D + R$, donde D es un operador inyectivo de parte imaginaria positiva y R es un operador de rango finito; entonces K es casilleno.

Demostración. Veamos primero que si D es inyectivo, entonces $Ker(K)$ es de dimensión finita. En efecto si existe una familia ortonormal $\{e_n\}$, tal que $K(e_n) = 0, \forall\, n \geq 1$, entonces $D(e_n) = -R(e_n), \forall\, n \geq 1$. Si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j R(e_j) = 0$, entonces $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j D(e_n) = D(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_j)) = 0$. Esto dice que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_j) = 0$ y por lo tanto $\alpha_j = 0, \forall\, 1 \leq j \leq n$, lo que contradice que R es un operador de rango finito.

Escribamos $K = K_1 + iK_2$, donde $K_1 = \frac{D+R+D^*+R^*}{2}$ y $K_2 = \frac{D+R-D^*-R^*}{2i}$.

Sea $M \in lat(K)$ y demostremos que $\dim\left(M \ominus \overline{K(M)}\right) < +\infty$. Consideremos $L = \ker\left(\frac{R-R^*}{2i}\right)$. Por ser R de rango finito L es de codimensión finita. Es decir $H = L \oplus W$ con $\dim(W) = r < +\infty$. Se deduce que $M \ominus \overline{K(M)} = L \cap (M \ominus \overline{K(M)}) \oplus W \cap (M \ominus \overline{K(M)})$. Veamos que $L \cap (M \ominus \overline{K(M)}) \subset Ker(K)$, lo que probaría el resultado. Sea $x \in L \cap (M \ominus \overline{K(M)})$, luego $K_2(x) = \frac{D-D^*}{2i}(x)$ y por lo tanto $\langle K_2(x), x \rangle > 0$. Veamos que $K(x) = 0$, de lo contrario, como $\langle K(x), x \rangle = 0 = \langle K_1(x), x \rangle + i\langle K_2(x), x \rangle$ y $\langle K_1(x), x \rangle$ es un número real, entonces $\langle K_2(x), x \rangle = 0$. Esto dice que $x = 0$, lo que es contradictorio. Termina la prueba.■

El siguiente resultado nos pertenece y sigue la misma filosofía del teorema 1:

Teorema 3. Si $T \in B(H)$ es invertible y $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ es un operador casinilpotente y casilleno, entonces T es lleno.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952
BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ISSN 2588-0764

Demostración. Siguiendo los mismos argumentos de la prueba del teorema 1 para K compacto, llegamos a que existe $M \in lat(T)$ y una familia ortonormal $\{e_n\}$, tal que $e_n \in M \ominus \overline{T(M)}$ y existe $k \geq 0$, tal que $K(\{e_n\}) \subset T^k(M)$, pero $K(\{e_n\}) \not\subset T^{k+1}(M)$. Además, valen las relaciones:

$$K(e_n) = \beta_n \cdot e_{n+k} + x_{n+k+1}, \qquad x_{n+k+1} \in K^{n+k+1}(M), \forall\, n \geq 0 \ (1)$$

$$T(e_n) = \alpha_n \cdot e_n + y_{n+1}, \qquad x_{n+1} \in T^{n+1}(M), \forall\, n \geq 0 \ (2)$$

$$\beta_n \cdot \alpha_{n+k} = \alpha_n \cdot \beta_{n+1}, \forall\, n \geq 0 \ (3)$$

Por un argumento similar al del teorema 1, se prueba que $\beta_n \neq 0, \ \forall\, n \geq 0$.

Usando la relación (1) se deduce:

$$\left|\beta_1 \cdot \beta_{1+k} \cdots \beta_{1+(r-1)k}\right| \leq \|K^r(e_1)\|$$

Por lo tanto

$$\left|\beta_1 \cdot \beta_{1+k} \cdots \beta_{1+(r-1)k}\right| \leq \|K^r\|$$

Pasando al límite:

$$\lim_{r \to +\infty} \sqrt[r]{\left|\beta_1 \cdot \beta_{1+k} \cdots \beta_{1+(r-1)k}\right|} \leq \lim_{r \to +\infty} \sqrt[r]{\|K^r\|} = 0 \ \ (4)$$

Observemos de la relación (4) que $k > 0$.

Usando (3) se llega a las relaciones:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+k} \cdots \alpha_{2k}} \beta_{1+k} = \cdots = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{\alpha_{1+(r-1)k} \cdots \alpha_{rk}} \beta_{1+(r-1)k} \ (5)$$

De lo anterior se deduce que

$$|{\beta_1}^r \cdot \frac{(\alpha_1 \cdots \alpha_k)^r}{\alpha_{1+k} \cdots \alpha_{rk}}| \leq \left|\beta_1 \cdot \beta_{1+k} \cdots \beta_{1+(r-1)k}\right|$$

Y como $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\alpha_n| \leq \|T\|$, deducimos la desigualdad:

$$\frac{|\beta_1|}{\|T\|^k \cdot \|T^{-1}\|^k} \leq \sqrt[r]{\left|\beta_1 \cdot \beta_{1+k} \cdots \beta_{1+(r-1)k}\right|}$$

Pasando al límite obtenemos una contradicción. Esto termina la prueba. ■

De los resultados obtenidos de los teoremas 1 y 3, es natural preguntarse:

¿Si $T \in B(H)$ es invertible y $K \in Alglat(T) \cap \{T\}'$ donde K es un operador de Riesz casilleno, entonces T es lleno? Ésta es una conjetura abierta todavía.

Ahora trabajaremos sobre un X espacio de Banach. Vale el siguiente lema:

Lema 1. Sea $T \in B(X)$. Si $x_n \in X$ y $f_n \in X^*$ con $f_n(x_n) = \|f_n\| = \|x_n\| = 1$, tales que $f_n(T(x_n)) \to 0$ y $x_n \xrightarrow{d} 0$; entonces $0 \in W_e(T)$.

Demostración. Se puede consultar en Bonsal y Duncan (1973).

El siguiente resultado es fundamental y nos pertenece:

Teorema 4. Si $T \in B(X)$ con X espacio de Banach reflexivo y T no es casilleno; entonces existe $M \in lat(T)$ tal que $0 \in W_e((T|M)')$.

Demostración. Por hipótesis T no es casilleno y por lo tanto existe $M \in lat(T)$ tal que

$$\frac{M}{\overline{T(M)}} \cong \overline{T(M)}^{\perp} \subset M^*$$

es un subespacio de dimensión infinita.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión básica normalizada en $\overline{T(M)}^{\perp}$. Sabemos por el teorema de Hahn − Banach que, existe $\gamma_n \in M^{**}$ tal que $\gamma_n(f_n) = \|f_n\| = 1$.

Por ser X reflexivo, entonces M es reflexivo y por lo tanto existe $x_n \in M$, tal que $\gamma_n = J_{x_n}$. Por otro lado $\gamma_n((T|M)')(f_n)) = \gamma_n(f_n \circ T|M) = (f_n \circ T|M)(x_n) = f_n(T(x_n) = 0, \ \forall\, n \geq 1$. Por ser M^* reflexivo se deduce que $f_n \xrightarrow{d} 0$, por el lema 1 deducimos que $0 \in W_e((T|M)')$, lo que prueba e resultado. ■

Deducimos a partir del teorema anterior una caracterización de los operadores casillenos:

Corolario 1. Si $T \in B(X)$ con X espacio de Banach reflexivo y $T = \lambda I + K$ $(\lambda \neq 0)$ con K un operador compacto; entonces T es casilleno.

Demostración. Si T no es casilleno, existe un $M \in lat(T)$ tal que $0 \in W_e((T|M)')$ por el teorema 4.

Notemos que $(T|M)' = \lambda(I|M^*) + K'|M^*$ con $K'|M^*$ compacto.

ISSN 2588-0764

Sea $f \in (B(M^*))^*$ tal que $f(I) = \|f\| = 1$ y $f(F) = 0$ para cada $F \in B(M^*)$ compacto con $f((T|M)') = 0$.

Como $f((T|M)') = \lambda f\big((I|M^*)\big) + f(K'|M^*) = \lambda = 0$, llegamos a una contradicción. Esto termina la prueba.■

Finalizamos esta investigación con la siguiente interrogante:

¿Si $T \in B(X)$ con X espacio de Banach reflexivo y $0 \notin W_e(T)$; entonces T es casilleno?

4. CONCLUSIONES

La teoría de los operadores casillenos ha sido hasta la fecha poco explorada. Realmente la teoría de los operadores llenos resultó de interés para los investigadores que pretendían resolver la conjetura de los subespacios invariantes, y aún siguen apareciendo artículos en esta dirección. Sería particularmente interesante estudiar la casillenitud de los operadores de la forma $T_p^{(n)} \in B(X_p^{(n)})$, donde X es un espacio de Banach reflexivo y $X_p^{(n)} = \Big\{(x_1, \cdots, x_n) \colon \|(x_1, \cdots, x_n)\| = (\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p)^{\frac{1}{p}}$ con $p > 1\Big\}$. El operador $T_p^{(n)}$ se define por $T_p^{(n)}\big((x_1, \cdots, x_n)\big) = (T(x_1), \cdots, T(x_n))$. Erdos preguntaba, para el caso $p = 2$, ¿Es T casilleno, si y sólo si, $T_p^{(n)}$ es casilleno?

En un espacio de Hilbert separable, se prueba que si $0 \notin W_e(T)$, entonces T es un operador casilleno. En general, no sabemos si el resultado anterior es cierto para operadores definidos sobre espacios de Banach reflexivos. Una respuesta afirmativa nos puede llevar a interesantes consecuencias. Veamos que $W_e(T_p^{(n)}) \subset W_e(T)$. En efecto

$$W_e\left(T_p^{(n)}\right) = \bigcap_{K \in B\left(X_p^{(n)}\right), K \text{ compacto}} co(W_{esp}(T_p^{(n)} + K) \subset \bigcap_{K \in B(X), K \text{ compacto}} co(W_{esp}(T + K)_p^{(n)})$$

$$= \bigcap_{K \in B\left(X_p^{(n)}\right), K \text{ compacto}} co(W_{esp}(T + K) = W_e(T)$$

Aquí $co(W_{esp}\Big(T_p^{(n)} + K\Big)$ es la cápsula convexa del rango numérico espacial; por lo tanto si $0 \notin W_e(T$, entonces $0 \notin W_e\left(T_p^{(n)}\right)$ y serían $T_p^{(n)}$ casillenos para cada n.

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses

6. REFERENCIAS

Bonsal, F. F., & Duncan, J. (1973). *Numerical Ranges II*. Cambridge University Press.

Bravo, J. R. (1980). *Relations between $latT, latT^{-1}, latT^{2}$ and operators whit compact imaginary parts* [PhD Dissertation. University of California].

Carothers, N. L. (2004). *A Short Course on Banach Space Theory*. Cambridge University Press.

Erdos, J. A. (1979a). Dissipative operators and approximation of inverses. *Bulletin of the London* Mathematical *Society*, *11*(2), 142-144.

Erdos, J. A. (1979b). Singly generated algebras containing compact operators. *Journal of Operator Theory*, *2*(2), 211-214.

Karanasios, S. (1994). Full operators on reflexive Banach spaces. *Bulletin of the Greek Math. Soc*, *36*, 81-86.

Kreyszig, E. (1979). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons.

Rosales, E. (2012). Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *19*(2), 147-154.

Rosales, E. (2020). Resultados sobre operador llenos en espacios de Hilbert. *Revista Bases de la Ciencia. 5*(1), 51-62. https://doi.org/10.33936/rev_bas_de_la_ciencia.v5i1.1686

Schechter, M. (1971). *Principles of functional Analysis*. Academic Press.

Contribución de autores

Autor	Contribución
Edixo Rosales	Concepción, diseño del artículo y redacción