



Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 300 -310). Edición Continua
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index>
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4408>.

DINÁMICA DE LA TRANSFORMACIÓN GENERALIZADA DE BOOLE

Nelly Elisenia Mendoza Mendoza ^{1*} , Luis Bladismir Ruiz Leal ²

¹ Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: nmendoza1573@utm.edu.ec

² Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.

Email: luis.ruiz@utm.edu.ec

*Autor para correspondencia: nmendoza1573@utm.edu.ec

Recibido: 25-06-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza

RESUMEN

Los estudios realizados a la transformación de Boole $B(x) = x - \frac{1}{x}$ y sus parametrizaciones, en su gran mayoría, se ha hecho desde la perspectiva de la teoría ergódica infinita y recientemente se estudió la ergodicidad para la medida invariante de probabilidad absolutamente continua a la de Lebesgue para $B_\alpha(x) = \alpha(x - \frac{1}{x})$ con $\alpha \in (0, 1)$. Esos estudios sólo consideran los casos donde la familia de funciones no tienen puntos fijos e inclusive en ese caso no se describe completamente el comportamiento dinámico. Partiendo de esto, se considera una generalización de la transformación de Boole de la forma $f_{abc}(x) = ax - \frac{b}{x} + c$ con $a > 0$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ y se realiza un estudio de su dinámica para un conjunto amplio del espacio de los parámetros. Específicamente, se consigue una región del conjunto de parámetros donde f_{abc} es transitivo y presenta una relación, por medio de la conjugación topológica, con la dinámica simbólica (asociada a el Shift) para un subconjunto del espacio de dos símbolos, lo que justifica su comportamiento caótico en este caso. Se demuestra que existe una región abierta del espacio de parámetros donde f_{abc} es uniformemente robustamente transitivo. También, se prueba que para $a > 1$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, f posee dos puntos fijos hiperbólicos y entre estos dos puntos existe un conjunto de Cantor invariante uniformemente robustamente transitivo, cuya dinámica es equivalente a la del shift unilateral de dos símbolos.

Palabras clave: Conjunto de Cantor robustamente transitivo, generalización de Boole, Transitividad, Transformación de Boole.

REVIEW OF THE VAN DER POL EQUATION AND ITS MODIFICATIONS

ABSTRACT

The studies carried out on the Boole transformation $B(x) = x - \frac{1}{x}$ and its parameterizations, for the most part, have been done from the perspective of the infinite ergodic theory and recently the ergodicity for the absolutely continuous (respect to Lebesgue measure) invariant probability measure for $B_\alpha(x) = \alpha(x - \frac{1}{x})$ with $\alpha \in (0, 1)$. These studies only consider the cases where the family of functions do not have fixed points and even in that case the dynamic behavior is not completely described. Starting from this, consider a generalization of the Boole transformation of the form $f_{abc}(x) = ax - \frac{b}{x} + c$ with $a > 0$, $b > 0$ and $c \in \mathbb{R}$ and a study of their dynamics is carried out for a wide set of parameter spaces. Specifically, a

region of the set of parameters is obtained where f_{abc} is transitive and presents a relation, by means of topological conjugation, with the symbolic dynamics (associated with the Shift) for a subset of the space of two symbols, which justifies its chaotic behavior in this case. It is shown that there is an open set of the parameter space where f_{abc} is uniformly robustly transitive. Also, it is proved that for $a > 1$, $b > 0$ and $c \in \mathbb{R}$, f has two hyperbolic fixed points and between these two points there exists a uniformly robustly transitive invariant Cantor set, whose dynamic is equivalent to unilateral shift of two symbols.

Keywords: Boole Generalization, Boole Transformation, Robustly Transitive Cantor Set, Transitivity.

UNE REVUE DE L'EQUATION DE VAN DER POL ET DE SES MODIFICATIONS

RESUMO

Os estudos realizados para a transformação de Boole $B(x) = x - \frac{1}{x}$ e suas parametrizações, quase sempre, foram feitos sobre a ótica da teoria ergódica infinita e a ergodicidade foi recentemente estudada para a medida de probabilidade invariante absolutamente contínua pra Lebesgue para $B_\alpha(x) = \alpha(x - \frac{1}{x})$ com $\alpha \in (0, 1)$. Esses estudos consideram apenas os casos em que a família de funções não possui pontos fixos e mesmo nesse caso o comportamento dinâmico não é completamente descrito. A partir disso, é considerado uma generalização da transformação de Boole da forma $f_{abc}(x) = ax - \frac{b}{x} + c$ com $a > 0$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ e um estudo de sua dinâmica é realizado para um amplo conjunto do espaço de parâmetros. Especificamente, obtém-se uma região do conjunto dos parâmetros onde f_{abc} é transitivo e apresenta uma relação, por meio da conjugação topológica, com a dinâmica simbólica (associada ao Shift) para um subconjunto do espaço de dois símbolos, o que justifica pra este caso seu comportamento caótico. Mostra-se que existe uma região aberta do espaço de parâmetros onde f_{abc} é uniformemente robustamente transitiva. Além disso, é provado que para $a > 1$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, f_{abc} tem dois pontos fixos hiperbólicos e entre esses dois pontos existe um conjunto de Cantor invariante uniformemente robustamente transitivo, cuja dinâmica é equivalente à o shift unilateral de dois símbolos.

Palavras chave: Boole Generalizada, Conjunto de Cantor robustamente transitivo, Transformação de Boole, Transitividade.

Citación sugerida: Mendoza, N., Ruiz, L. (2022). DINÁMICA DE LA TRANSFORMACIÓN GENERALIZADA DE BOOLE. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 7, (No. Especial), Diciembre, 300-310. DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4408>.



1. INTRODUCCIÓN

La transformación de Boole $B(x) = x - \frac{1}{x}$ es un ejemplo importante de una función no uniforme expansora sobre una variedad diferenciable no compacta. Adler y Weiss (1973) probaron que B es ergódica con respecto a la medida de Lebesgue, esto motivó, a varios investigadores a estudiar los fenómenos de la teoría ergódica infinita entre ellos, Aaronson quien estudió una generalización de la forma $B_\alpha(x) = \alpha x - \frac{1}{x}$ demostrando que para todo $\alpha \in (0, 1)$, B_α preserva una medida μ_α de probabilidad especial (satisface una la ley de Cauchy ver Letac (1977)) que converge débilmente a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, Jon Aaronson (1978). A partir de este trabajo se han realizado diferentes estudios a una generalización de la forma $B_{ab}(x) = ax - \frac{b}{x}$ donde han probado algunas propiedades para la medida en valores puntuales de los parámetros, Neuwirth (1978); Prykarpatsky y Feldman (2006). En los trabajos de Umeno (1998) y Umeno y Okubo (2016) estudiaron los exponente de Lyapunov para una generalización de la transformación de Boole de la forma $B_\alpha(x) = \alpha(x - \frac{1}{x})$, para valores $\alpha \in (0, 1)$. Justamente, para diferentes valores del parámetro $\alpha \in (0, 1)$ se estudiaron otras propiedades relacionadas con la ergodicidad de B_α , como por ejemplo la propiedad de que B_α sea exacta o una mezcla respecto a la medida invariante existente mostrada por Aaronson, ver Okubo y Umeno (2018) y Okubo y Umeno (2021). Recientemente Blackmore, Balinsky, Kycia y Prykarpatski (2021) se estudia la entropía para la generalización de $B_{ab}(x) = ax - \frac{b}{x}$ con $0 < a < 1$. y realiza otra prueba de la ergodicidad de B respecto a la medida de Lebesgue.

Muñoz en sus trabajos S. Muñoz (2006) y S. Muñoz (2015) estudia una clase amplia de funciones $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mostrando unas condiciones para que sean transitivos y otras condiciones para que exhiban la propiedad de robustamente transitivos. En particular, f_{abc} con $a < 1$, $b > 0$ y c próximo de cero forman parte de esa clase de funciones. En Leal, Mata y Ramírez (2018) presentan una familia de funciones de $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ transitivos que la llamaron tipo Boole y que B_{1b} es un elemento particular de esta clase de funciones, $\forall b > 0$. Todos los casos mencionados (incluyendo los relacionados con la teoría ergódica) tienen una particularidad que fueron estudiados para valores del parámetro donde las transformaciones no tienen puntos fijos. Claro está, que f_{abc} posee puntos fijos para valores del parámetro (a, b, c) en un conjunto no acotado y con interior no vacío. La existencia de puntos fijos elimina la transitividad y la posibilidad de una medida ergódica absolutamente continua a la de Lebesgue pero, eso no significa que para esos valores del parámetro la función no tenga un comportamiento caótico en un conjunto invariante. Una pregunta natural es: ¿Cuál es el comportamiento dinámico para estos valores del parámetro?

En este trabajo se realiza un estudio de una parametrización de Boole $f_{abc}(x) = ax - \frac{b}{x} + c$ desde el punto de vista de la dinámica topológica, mostrando el espacio de parámetros donde f_{abc} posee puntos fijos y su conjunto estable. Se prueba cuáles son los valores del parámetro donde f es transitivo y una relación biunívoca con la dinámica simbólica (por medio del Shift) para un subconjunto del espacio de dos símbolos, de hecho se prueba que para $\frac{1}{2} < a < 1$, $b < 0$ y c próximo de cero f_{abc} es robustamente transitivo mejorando el caso estudiado por S. Muñoz (2015) para B_{a1} . Finalmente se estudia el caso $a > 1$ demostrando que, entre los dos puntos fijos hiperbólicos que posee, existe un conjunto de Cantor invariante por f_{abc} robustamente transitivo. Note además que, $f_{110} = B$, $f_{ab0} = B_{ab}$ y $f_{\alpha\alpha0} = B_\alpha$.

Es importante mencionar que en la actualidad se ha logrado demostrar que este tipo de funciones aparece de forma intrínseca en la dinámica de una clase de homeomorfismos transitivos del plano $F : \mathbb{R}^2 \setminus \delta \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ donde δ y γ son curvas de discontinuidad que dividen el plano en dos componentes conexas no acotadas, ver Leal y Sergio Muñoz (2021) y Leal y Munoz (2022). De hecho, se usa f_{1b0} con $b > 0$ y $f_{a,b,0}$ con $a < 1$ (pero a próximo de 1) para mostrar una familia de difeomorfismos transitivos

del plano cuyo conjunto de puntos periódicos es denso en el plano (Leal y Sergio Muñoz (2021)).

2. MÉTODOS

El método usado es el lógico deductivo. Se usaron varios resultados de la Teoría de sistemas dinámicos para espacios compactos y la reciente teoría generada para transformaciones de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R}$ conocida como sistemas alternantes crecientes para describir el comportamiento dinámico para diferentes valores de los parámetros $a > 0$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. La aplicación de esta metodología queda implícita en cada una de las demostraciones de los resultados obtenidos.

Para el estudio del caso $a > 1$ donde f_{abc} posee dos puntos fijos hiperbólicos se sigue las ideas del trabajo de Leal, Mata y Ramírez (2018) para identificar el conjunto de Cantor transitivo, usando el hecho que los puntos fijos son repulsores se determina que la órbita de los puntos fuera del conjunto de Cantor no son acotadas. para probar que f_{1b0} es transitivo en los valores del parámetro $a = 1$, $b > 1$ y $c = 0$ se usa la teoría de sistemas alternantes crecientes generada en el trabajo de S. Muñoz (2015).

3. PUNTOS FIJOS Y CONJUNTO ESTABLE

De aquí en adelante se denotará $f = f_{abc}(x) = ax - \frac{b}{x} + c$, para $x \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. En esta sección se usará la siguiente notación $f_- = f|_{(-\infty, 0)}$, $f_+ = f|_{(0, +\infty)}$, $A_f = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(0)$ y $\mathbb{R}_f = \mathbb{R} \setminus A_f$. El *conjunto estable* de un punto fijo p es el conjunto:

$$W^s(p, f) = \{y \in \mathbb{R}_f : |(f^n(y) - p)| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}.$$

Lema 3.1. Si $a > 1$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces existen dos puntos fijos hiperbólicos repulsores $p_1 < 0$ y $p_2 > 0$ tales que $f^n(x) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$ si $x < p_1$; y $f^n(x) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ si $x > p_2$.

Prueba. De la ecuación $f(x) = x$ se tiene que $(a-1)x^2 + cx - b = 0$, la solución real de esta ecuación existe si $c^2 + 4(a-1)b > 0$, por lo tanto los puntos fijos de f tienen la forma:

$$p_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4(a-1)b}}{2(a-1)} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(a-1)b}}{2(a-1)}. \quad (3.1)$$

Como $a > 1$ y $f'(x) = a + \frac{b}{x^2} > a$, $\forall x \neq 0$, entonces $p_1 < 0$, $p_2 > 0$, $f'(p_1) > 1$ y $f'(p_2) > 1$. Esto hace que $f(x) > x$ si $x > p_2$; y que $f(y) < y$ si $y < p_1$. Sea $x > p_2$ entonces, la sucesión de iterados $\{f^n(x)\}$ es una sucesión creciente y por tanto, $f^n(x) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ para todo $x > p_2$. Análogamente $f^n(y) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$, para todo $y < p_1$. □

Lema 3.2. Si $a < 1$, $b > 0$ y $c^2 + 4(a-1)b = 0$ entonces, f posee un único punto fijo p tal que:

- $p < 0$ y $(-\infty, p) \subset W^s(p, f)$ si $c < 0$
- $p > 0$ y $(p, +\infty) \subset W^s(p, f)$ si $c > 0$.

Prueba. De la demostración del Lema 3.1 (en la ecuación (1)) y la hipótesis, el punto fijo tiene la forma: $p = \frac{-c}{2(a-1)}$. Usando el hecho que $c^2 + 4(a-1)b = 0$, se tiene que $f'(p) = 1$. Por otro lado, $f''(x) = \frac{-b}{x^3}$, para todo $x \neq 0$. Si $c < 0$, entonces $p < 0$ y $f''(x) > 0$, $\forall x < 0$ esto significa que $f'(x) < 1$, $\forall x < p$. Así, $f(x) > x$ para todo $x < p$. Esto implica que $f^n(x) \rightarrow p$, $n \rightarrow +\infty$ $\forall x < p$. Si $c > 0$ entonces, $p > 0$, $f''(x) < 0$, $\forall x > 0$ luego $f'(x) < 1$, $\forall x > p$. Usando un razonamiento análogo $f^n(x) \rightarrow p$, $n \rightarrow +\infty$ $\forall x > p$. Sea ha probado que si $c < 0$, entonces $W^s(p, f) \supset (p, +\infty)$ o que si $c > 0$, entonces $(-\infty, p) \subset W^s(p, f)$. □

Lema 3.3. Si $a < 1$, $b > 0$ y $c^2 + 4(a-1)b > 0$ entonces existen dos puntos fijos hiperbólicos $p_1 < p_2$ con la siguiente propiedad:

- Si $c > 0$, entonces $(p_1, +\infty) \subset W^s(p_2, f)$.
- Si $c < 0$, entonces $(-\infty, p_2) \subset W^s(p_1, f)$.

Prueba. **Parte a**, si $c > 0$, como $a < 1$, entonces $0 < p_1 < p_2$. Ya que $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ y $f''(x) < 0$, $\forall x > 0$ se sigue que $f'(p_1) > 1$ y $f'(p_2) < 1$.

Así todo $x \in (p_1, p_2]$ satisface que $f^n(x) \rightarrow p_2$, $n \rightarrow +\infty$. Como $f'(p_2) < 1$ entonces, $f(x) < x$, $\forall x > p_2$ esto implica que $f^n(x) \rightarrow p_2$, $n \rightarrow +\infty$ para todo $x \geq p_2$. Así, $(p_1, +\infty) \subset W^s(p_2, f)$.

Parte b, es análoga, usando el hecho que $f''(x) > 0$, $\forall x < 0$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, en este caso $f'(p_1) < 1$ y $f'(p_2) > 1$. $\square$

Lema 3.4. Si $a = 1$, $b > 0$ y $c \neq 0$, entonces f posee un único punto fijo p tal que $f^n(x) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, $\forall x > p > 0$ si $c > 0$ y $f^n(x) \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$, $\forall x < p < 0$ si $c < 0$.

Prueba. La demostración sigue las mismas ideas realizadas en la demostración del lema 3.1, que en este caso $f'(x) > 1$ para todo $x \neq 0$. $\square$

4. CONJUNTOS INVARIANTES CAÓTICOS Y DINÁMICA SIMBÓLICA

$\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de todas las sucesiones con valores en el conjunto $\{0, 1\}$. Un elemento $a \in \Sigma_2$ se denotará por $a = (a_0 a_1 a_2, \dots)$, el espacio Σ_2 con la métrica

$$d_2(a, b) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$$

es un espacio métrico compactado. La función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definido por $\sigma(a) = b = (a_1 a_2, \dots)$, $b_i = a_{i+1}$, $\forall i \geq 0$, es conocida como la función Shift y tiene las siguientes propiedades:

- σ es continua;
- σ es transitiva;
- $\text{Per}(\sigma)$ (conjunto de puntos periódicos de σ) es denso en Σ_2 .

$\Sigma' = \Sigma_2 \setminus \{a \in \Sigma_2 : \text{para algún } j \geq 0, a_i = 0, \forall i \geq j \text{ o } a_i = 1, \forall i \geq j\}$. Note que

$$\bigcup_{n \geq 0} (\sigma^{-n}(\underline{0}) \cup \sigma^{-n}(\underline{1})) = \{a \in \Sigma_2 : \text{para algún } j \geq 0, a_i = 0, \forall i \geq j \text{ o } a_i = 1, \forall i \geq j\},$$

donde $\underline{0} = (000 \dots)$ y $\underline{1} = (111 \dots)$. Es bien conocido que Σ' es invariante por σ (esto es, $\sigma(\Sigma') \subset \Sigma'$), $\sigma' = \sigma|_{\Sigma'}$ es transitiva y $\text{Per}(\sigma')$ es denso en Σ' .

Para describir la dinámica de f en el caso $a = 1$ es necesario verificar que f es una clase de transformaciones estudiadas en S. Muñoz (2006) y S. Muñoz (2015), él considera la siguiente clase funciones $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua con las siguientes propiedades:

M1) g es creciente en cada componente conexa

M2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$

M3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

M4) $g(x) - (x) \neq 0, \forall x \neq 0$

Esta clase de funciones con estas condiciones es llamada un *sistema alternante creciente* (SAC)

Se puede verificar que si g es un SAC entonces, existen $x_0 < 0$ y $x_1 > 0$ talque $f^{-1}(0) = \{x_0, x_1\}$.

También se puede notar lo siguiente:

Observación 4.1. De la definición de SAC se puede extraer las siguientes propiedades:

1. Si g es un SAC entonces, para cada $x > x_1$ existe una subsucesión $n_k \rightarrow +\infty$ tal que $g^{n_k}(x) \in (0, x_1)$ para todo $k \geq 1$;
2. Si g es un SAC entonces, para cada $x < x_0$ existe una subsucesión $m_k \rightarrow +\infty$ tal que $g^{m_k}(x) \in (x_0, 0)$ para todo $k \geq 1$;

Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces del hecho que $f'(x) > a$ para todo $x \neq 0$, f satisface M_1 y M_3 . Por la misma naturaleza de f , ella satisface M_2 . Si $a > 1$ y $c^2 + 4(a-1)b < 0$ resulta que, f no tiene puntos fijos por tanto, satisface M_4 . Hora, si $a = 1$ y $c = 0$ se puede ver también, en este caso, que f no tiene puntos fijos. Esto significa que:

Observación 4.2.

Si $a < 1$, $b > 0$ y $c^2 + 4(a-1)b < 0$ entonces, f es un sistema alternante creciente.

Si $a = 1$, $b > 0$ y $c = 0$ entonces, f es un sistema alternante creciente.

Definición 4.1. (S. Muñoz (2015)) Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ un SAC. Se dice que g es expansivo si $A_g = \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(0)$ es denso en $\mathbb{R}$.

Notación $\mathbb{R}_g = \mathbb{R} \setminus A_g$. Observe que $g(\mathbb{R}_g) = \mathbb{R}_g$, lo que significa que la órbita positiva de todo punto $x \in \mathbb{R}_g$ está bien definida.

Teorema 4.1. (S. Muñoz (2015)): Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ un SAC. Entonces

1. $\bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(0)$ es denso en $\mathbb{R}$ si, y solo si, para cualesquiera $x \neq y$ en $\mathbb{R}_g$ existe $N \geq 1$ tal que $g^N(x) \cdot g^N(y) < 0$
2. g es expansivo si, y solo si, $g|_{\mathbb{R}_g} : \mathbb{R}_g \rightarrow \mathbb{R}_g$ es topológicamente conjugado con el Shift σ' .

Teorema 4.2. Si $a = 1$, $b > 0$ y $c = 0$ entonces f es topológicamente conjugado con al Shift σ' .

Prueba. Por el Teorema 4.1 ítem 2, se debe probar que f es expansiva. Para ello, supongamos que no es expansiva, entonces por el Teorema 1.1 existe $x, y \in \mathbb{R}_f$ tal que $f^n(x) \cdot f^n(y) > 0$ $n \geq 1$. Esto significa que

$$f^n(x), f^n(y) \in (0, +\infty) \quad \text{o} \quad f^n(x), f^n(y) \in (-\infty, 0) \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (4.1)$$

Por la observación 4.2, f es un sistema alternante creciente. Existe $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$, por la observación 4.1 y, el hecho que $f(0, x_1) = (-\infty, 0)$ se tiene que, para todo $z \in \mathbb{R}_f$ existe una subsucesión $m_k \rightarrow +\infty$ tal que $f^{m_k}(z) \in (0, x_1)$, de esto junto con (2) se sigue que, existe una subsucesión n_k tal que $f^{n_k}(x), f^{n_k}(y) \in (0, x_1)$ para todo $k \geq 1$. Por otro lado, existe $x_2 > x_1$ tal que $f(x_2) = x_1$ y $f(x_1, x_2) = (0, x_1)$. Sea $\lambda = \inf\{f'(a) : a \in [x_1, x_2]\} > 1$. Aplicando el Teorema del Valor Medio (TVM) se tiene que,

$$|f^{n_1}(x) - f^{n_1}(y)| \geq \lambda |x_2 - x_1|$$

Como f es derivable y el hecho (2) se puede aplicar sucesivamente el Teorema de Valor Medio. Ya que $f'(x) > 1$ para todo $x \neq 0$ se tiene que, $|f^{n_2-1}(x) - f^{n_2-1}(y)| \geq |f^{n_1}(x) - f^{n_1}(y)|$. Aplicando TVM nuevamente resulta que, $|f^{n_2}(x) - f^{n_2}(y)| \geq |f^{n_2-1}(x) - f^{n_2-1}(y)|$. Por tanto,

$$|f^{n_2}(x) - f^{n_2}(y)| \geq \lambda^2 |x_2 - x_1|$$

Realizando este razonamiento sucesivamente a f_k^n se concluye que $|f^{n_k}(x) - f^{n_k}(y)| \geq \lambda^k |x_2 - x_1|$ para todo $k \geq 1$. Esto implica que $|f^{n_k}(x) - f^{n_k}(y)| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$ lo cual es una contradicción. Así f es expansiva. $\square$

Se denota

$$F_i := \{g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ es de clase } C^i\}$$

para $i = 0, 1, 2$.

- Una función $g \in \mathbb{F}_0$ es $\delta - C^0$ próximo de f si $|g(x) - f(x)| < \delta$ para todo $x \neq 0$
- Una función $g \in \mathbb{F}_1$ es $\delta - C^1$ próximo de f si g es $\delta - C^0$ próximo de f y $|g'(x) - f'(x)| < \delta$ para todo $x \neq 0$

Definición 4.2. Una función $g \in F_1$ es uniformemente robustamente transitivo si existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in F_1$ que está $\delta - C^1$ próximo de g , es transitivo.

Sea g un SAC, entonces existen $x_0 < 0$ y $x_1 > 0$ tal que $g^{-1}(0) = \{x_0, x_1\}$. Se denota $I = [x_0, x_1]$, por la observación 4.1 para cada $x \in I \setminus \{0\}$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n(x) \in I$. Este hecho hace posible definir la aplicación de primer retorno $g_I : I \setminus \{0\} \rightarrow I$ de la forma:

$$g_I(x) = g^{n(x)}(x) \quad \text{donde} \quad n(x) = \min\{n \geq 1 : g^n(x) \in I\}.$$

El siguiente resultado se encuentra en S. Muñoz (2015), muestra que el estudio del comportamiento dinámico para una función SAC se puede hacer por medio de la aplicación de primer retorno. Además, da una condición para obtener el fenómeno de robustamente transitivo.

Teorema 4.3. Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ un SAC de clase C^1 . Si

1. existe $\sigma > 1$ y $k > 0$ tal que $g'_I(x) \geq k\sigma^{n(x)}$ y $g'_I(x) > 1$ para todo $x \in I \setminus \{0\}$;
2. existe $\lambda > 0$ tal que $g'(x) > \lambda$ para todo $x \neq 0$;
3. existe $L > 0$ tal que $M = \sup\{g'(x) : |x| > L\} < 1$;
4. $\sigma^{\frac{m}{M}} > 1$ donde $m = \inf\{g'(x) : x \neq 0\}$.

entonces, g es uniformemente robustamente transitivo.

Teorema 4.4. Si $\frac{1}{2} < a < 1$, $b > 0$ y $c = 0$ entonces, f es uniformemente robustamente transitivo y $f|_{\mathbb{R}_f}$ es topológicamente conjugado a $\sigma' : \Sigma' \rightarrow \Sigma'$.

Prueba. La idea de la prueba es verificar las hipótesis del Teorema 4.3. Para ello comenzamos hallando los puntos donde $f(x) = 0$, esto son $x_0 = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ y $x_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$

Afirmación: Sea $I = \left[-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right] \setminus \{0\}$; $f|_I$ la aplicación de primer retorno satisface la condición 1 del Teorema 4.3.

Prueba: Sea $x \in \left[-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0\right)$, como $\frac{1}{2} < a < 1$ se tiene que para todo $x \in \left[-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0\right)$

$$f'(x) = a + \frac{b}{x^2} \geq 2a = 2a^2 \left(\frac{1}{a}\right) > 1 \quad (4.2)$$

Ahora, si $x \in \left[-\sqrt{\frac{b}{a}}, f^{-1}(x_1)\right] \Rightarrow f(x) \in \left(0, \sqrt{\frac{b}{a}}\right]$. Sea $x \in [f^{-1}(x_1), 0)$ tal que existe $n(x) \geq 2$ tal que $f^{n(x)} \in \left(0, \sqrt{\frac{b}{a}}\right]$. Note que, $f(x) = ax - \frac{b}{x} < -\frac{b}{x} \Rightarrow f^2(x) < f\left(-\frac{b}{x}\right) = -\frac{ab}{x} + x < -\frac{ab}{x}$, luego $f^3(x) < f\left(-\frac{ab}{x}\right) = -\frac{a^2b}{x} + \frac{x}{a} < -\frac{ab^2}{x}$, en general $f^{n(x)-1}(x) < -\frac{a^{n(x)-2} \cdot b}{x}$. Por otro lado $f^{n(x)-1}(x) > \sqrt{\frac{b^2}{a}}$, esto junto a la desigualdad anterior, $\sqrt{\frac{b}{a}} < -\frac{a^{n(x)-2} \cdot b}{x}$ esto implica que, $\frac{b}{a} < \frac{a^{2n(x)-4} \cdot b^2}{x^2}$ luego $\frac{1}{a^{2n(x)-3}} < \frac{b}{x^2}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
 f'_I(x) &= f'(x) \cdot f'(f(x)) \dots f'(f^{n(x)-1}(x)) > \left(a + \frac{b}{x^2}\right) \cdot a^{n(x)-1} > \left(a + \frac{1}{a^{2n(x)} - 3}\right) a^{n(x)-1} \\
 &= a^{n(x)} + \frac{a^{n(x)-1}}{a^{2n(x)} \cdot a^{-3}} = a^{n(x)} + \frac{1}{a^{n(x)} \cdot a^{-2}} \\
 &= a^{n(x)} + \frac{a^2}{a^{n(x)}} > a^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n(x)}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tomando $k = a^2$, $\sigma = \frac{1}{a}$ además, de (3) y (4) se sigue la demostración de la afirmación.

Como $f'(x) = a + \frac{b}{x^2} > a$ para todo $x \neq 0$, se verifica la hipótesis 2 del Teorema 4.3. Por otro lado, como $\frac{b}{x^2} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$, existe $L > 0$ tal que $\frac{b}{x^2} < 1 - a$ para todo $|x| \geq L$. Luego,

$$M = \{f'(x) : |x| > L\} = \{a + \frac{b}{x^2} : |x||x| > L\} = a + \frac{b}{L^2} < 1$$

lo que verifica el ítem 3 del Teorema 4.3. El ítem 4 se sigue inmediatamente pues

$$m = \inf\{g'(x) : x \neq 0\} = \{a + \frac{b}{x^2} : x \neq 0\} = a$$

$$y \sigma \frac{m}{M} = \frac{1}{M} > 1.$$

□

Corolario 4.1. Si $\frac{1}{2} < a < 1$ y $b > 0$ entonces, existe $c_0 = c_0(a, b) > 0$ tal que f_{abc} es transitiva para todo $c \in (-c_0, c_0)$.

Prueba. la prueba es inmediata ya que f_{abc} converge uniformemente a f_{ab0} cuando $c \rightarrow 0$. □

La teoría para funciones que son un sistema alternante creciente en el caso $a > 1$ ya no funciona ya que por el lema 1 f posee dos puntos fijos, justamente una condición para que f sea un sistema alternante es que no tenga puntos fijos.

Definición 4.3. Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Un conjunto Λ en $\mathbb{R}_g$ es transitivo respecto a g si $g(\Lambda)$ está contenido en Λ y $g|_\Lambda$ es transitivo.

Definición 4.4. Sea Λ un conjunto de cantor invariante para una función $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , g es uniformemente robustamente transitivo si existe $\delta > 0$ tal que para todo h que está $\delta - C^1$ próximo de g , existe $\Lambda_h \subset \mathbb{R}_h$ un conjunto de cantor transitivo respecto a h .

Teorema 4.5. Si $a > 1$, $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces existe $\Lambda \subset [p_1, p_2]$ un conjunto de cantor invariante tal que

- $f|_\Lambda$ es topológicamente conjugado a el shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.
- $f|_\Lambda$ es robustamente transitivo.

Prueba. Por el lema 3.1 existen 2 puntos fijos hiperbólicos p_1 y p_2 con $p_0 < 0 < p_1$. Se denota $q_1 = f_+^{-1}(p_0)$, $q_0 = f_-^{-1}(p_1)$, $I_0 = [p_0, q_0]$ y $I_1 = [q_1, p_1]$. Como $f'(x) = a + \frac{b}{x^2}$ y tomando $\lambda_1 = \min\{f'(p_0), f'(p_1)\} > 1$ resulta que, $f'(x) \geq \lambda$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Además, $f(I_0) = [p_0, p_1]$ y $f(I_1) = [p_0, p_1]$. Lo que significa que I_0 , I_1 y f satisfacen las hipótesis del teorema 4.1 de J. Aaronson y Society (1997) por tanto,

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0}^{+\infty} f^{-n} [I_0 \cup I_1],$$

es un conjunto de Cantor invariante y además, $f|_{\Lambda}$ es topológicamente conjugado al shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

Faltaría probar que $f|_{\Lambda}$ es robustamente transitivo.

Nuevamente del hecho que $f'(x) = a + \frac{b}{x^2}$ existe $k > 1$ tal que $f'(x) \geq k$ para todo $x \in [p_0, p_1] \setminus \{0\}$ por tanto, existe $\delta > 0$ con $\delta < k - 1$ tal que para todo $g \in F_1$ que está δ - C^1 próximo a f se tiene que:

- existe dos puntos fijos hiperbólicos para g denotados por p_-, p_+ con $p_- < 0 < p_+$;
- existe $\delta > 1$ tal que $g'(x) \geq 1$ para todo $x \in [p_-, 0) \cup (0, p_+]$.

Sea g una función δ - C^1 próximo a f . Se denota $x_0 = g^{-1}(p_+) < 0$, $x_1 = g^{-1}(p_-) > 0$, $I_0 = [p_-, x_0]$ y $I_1 = [x_1, p_+]$, g restricto a $I_0 \cup I_1$, satisface la hipótesis del Teorema 4.1 de J. Aaronson y Society (1997). En consecuencia

$$\Lambda_* = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(I_0 \cup I_1)$$

es un conjunto de Cantor y $g|_{\Lambda_*}$ es topológicamente conjugado al shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ esto implica que $g|_{\Lambda_*}$ es transitivo lo que prueba que $f|_{\Lambda}$ es robustamente transitivo. $\square$

5. CONCLUSIÓN

- Del hecho que $f|_{\mathbb{R}_f}$ sea topológicamente conjugado al shift $\sigma' : \Sigma'_2 \rightarrow \Sigma'_2$ para los valores del parámetro en los casos (a) $a = 1$, $b > 0$ y $c = 0$ y (b) $\frac{1}{2} < a < 1$, $b > 0$ y $c \in (-c_0, c_0)$ para algún $c_0 > 0$, se concluye que f es transitivo y $\text{Per}(f)$ es denso en $\mathbb{R}$. Además, para ambos casos f posee puntos periódicos de todos los periodos mayores e iguales a dos. La existencia de puntos fijos elimina la opción de conseguir transitividad.
- En el caso $a = 1$, $b > 0$ y $c \neq 0$ se prueba que $f|_{\mathbb{R}_f}$ es topológicamente conjugado al shift $\sigma^* : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_2^*$ en este caso σ^* es transitivo y $\text{Per}(\sigma^*)$ es denso en Σ_2^* . Por la conjugación topológica se concluye que $f|_{\mathbb{R}_f}$ es transitivo y $\text{Per}(f)$ es denso en $\mathbb{R}$. Además f posee puntos periódicos de todos los periodos.
- Para los parámetros $a < 1$, $b > 0$ y $c^2 + 4(a-1)b = 0$ del lema 3.2 existe un único punto fijo p tal que si $c < 0$ entonces, $p < 0$ y $(-\infty, p] \subset W^s(p, f)$. Ahora, considere $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(p, +\infty] \subset W^s(p, f)$. Se concluye que:

$$\Lambda_+ \cup W^s(p, f) = \mathbb{R}_f$$

Pregunta 1: (a) ¿Cómo es la estructura topológica de Λ_+ ? (b) Existe alguna codificación en término de algún subconjunto transitivo $\Sigma(a, b, c) \subset \Sigma_2$ respecto al shift σ .

Si $c > 0$ entonces $p > 0$ y $[p, +\infty) \subset W^s(p, f)$. Considere $\Lambda_- = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}((-\infty, p])$. Se concluye que $\Lambda_- \cup W^s(p, f) = \mathbb{R}_f$.

Λ_- es un conjunto invariante no acotado pues $f^{-n}(p) \in \Lambda_-$, $\forall n \geq 0$ y $f^{-n}(p) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

- Para $a > 1$ y $b > 0$ por el teorema 4.5 existe $\Lambda \subset \mathbb{R}_f$ un conjunto de Cantor positivamente invariante, que gracias a la conjugación topológica con el shift σ , $f|_{\Lambda}$ es transitivo y $\text{Per}(f)$ es denso en Λ .

- Siguiendo la definición de Caos según Devaney. Se concluye que para los parámetros considerados en los ítems (1), (2) y (4) anteriores f exhibe un comportamiento caótico.
- Es importante destacar que el caso $a = 1$ y $c \neq 0$ no fue considerado en este trabajo. En este caso f tiene un único punto fijo p hiperbólico repulsor, donde la sucesión de iteradas $f^n(x)$ de un punto x en $(-\infty, p)$ si $c < 0$ o $(p, +\infty)$ si $c > 0$, converge a infinito. Lo que deja abierta la siguiente interesante pregunta: Existe un conjunto invariante no numerable cuya dinámica sea caótica en el complemento de $(-\infty, p)$ o $(p, +\infty)$?

Agradecimiento 1. Los autores agradecen al Dr. Sergio Muñoz de la Universidade Federal do Rio de Janeiro de Brasil, por las fructíferas discusiones para generar este trabajo.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. REFERENCIAS

- Aaronson, J. [J.], y Society, A. M. (1997). *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*. American Mathematical Society. <https://books.google.com.ec/books?id=3mRo0wTdNv0C>
- Aaronson, J. [Jon]. (1978). Ergodic theory for inner functions of the upper half plane. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, 14(3), 233-253. http://www.numdam.org/item/AIHPB_1978__14_3_233_0/
- Adler, R. L., y Weiss, B. (1973). The ergodic infinite measure preserving transformation of boole. *Israel Journal of Mathematics*, 16(3), 263-278. <https://doi.org/10.1007/bf02756706>
- Blackmore, D., Balinsky, A. A., Kycia, R., y Prykarpatski, A. K. (2021). Entropy and Ergodicity of Boole-Type Transformations. *Entropy*, 23(11). <https://doi.org/10.3390/e23111405>
- Leal, B., Mata, G., y Ramírez, D. (2018). Traslaciones de Transformaciones Tipo Boole Robustamente Transitivas. *Novasinergia*, ISSN 2631-2654, 1(1), 6-13. <https://doi.org/10.37135/unach.ns.001.01.01>
- Leal, B., y Munoz, S. (2022). Invariant Cantor sets in the parametrized Hénon-Devaney map. *Dynamical Systems*, 0(0), 1-22. <https://doi.org/10.1080/14689367.2021.2012558>
- Leal, B., y Muñoz, S. [Sergio]. (2021). Hénon-Devaney like maps. *Nonlinearity*, 34(5), 2878-2896. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/abdd95>
- Letac, G. (1977). Which functions preserve Cauchy laws? *Proceedings of the American Mathematical Society*, 67(2), 277-286. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1977-0584393-8>
- Muñoz, S. [S.]. (2006). Robust transitivity and ergodicity of transformations of the real line and the real plane. *IMPA, Doctoral Thesis*. <https://preprint.impa.br/visualizar?id=5651>
- Muñoz, S. [S.]. (2015). Robust transitivity of maps of the real line [SERIE: A]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.*, 35(3), 1163-1177. <http://aimsciences.org//article/id/807e52c6-a741-470cb708-1cd668ecc7cb>
- Neuwirth, J. H. (1978). Ergodicity of some mapping of the circle and the line. *Israel J. Math.*, 31.
- Okubo, K.-i., y Umeno, K. (2018). Universality of the route to chaos: Exact analysis. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2018(10). <https://doi.org/10.1093/ptep/pty094>
- Okubo, K.-i., y Umeno, K. (2021). Infinite ergodicity that preserves the Lebesgue measure. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31(3), 033135. <https://doi.org/10.1063/5.0029751>
- Prykarpatsky, A. K., y Feldman, J. (2006). On the ergodic and spectral properties of generalized Boole transformations. I. *Miskolc Mathematical Notes*, 7(1), 91. <https://doi.org/10.18514/mmn.2006.128>



- Umeno, K. (1998). Superposition of chaotic processes with convergence to Lévy's stable law. *Physical Review E*, 58(2), 2644-2647. <https://doi.org/10.1103/physreve.58.2644>
- Umeno, K., y Okubo, K.-i. (2016). Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016(2), 021A01. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptv195>

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Nelly Mendoza	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo.
Luis Ruiz	Concepción, análisis, revisión y redacción.