BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 239 -255). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4598.

Ciencias Matemáticas

UNA REVISIÓN DE CONTROL EN SISTEMAS DINÁMICOS DE EVENTOS DISCRETOS

Carla Estefanía Demera Reyna[1*], **Guelvis Enrique Mata Díaz**[2]
[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: carlaestefaniademera@gmail.com
[2]Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Email: gematad2017@gmail.com

[*]Autor para correspondencia: carlaestefaniademera@gmail.com

Recibido: 27-05-2022/ Aceptado: 13-12-2022/ Publicación: 27-12-2022
Editor Académico: Carmen Judith Vanegas

RESUMEN

A partir de los años ochenta es propuesta una teoría para el control de una clase de sistemas, llamados sistemas de eventos discretos. Tal teoría es referida en general como control supervisorio y es una herramienta potencial para la minimización o eliminación del bloqueo en la clase de sistemas antes mencionada. Aquí los resultados teóricos son establecidos naturalmente en el dominio de los lenguajes formales, mientras la síntesis y los resultados computacionales son dados en el campo de los autómatas finitos determinísticos. Esto es crucial pues apertura una extensión a sistemas de gran escala. En este trabajo se considera una revisión y discusión de la teoría de control supervisorio, estableciendo para esto un marco referencial que abarca los conceptos más relevantes desde su inicio hasta la actualidad, que permiten demostrar que el concepto de bloqueo en sistemas de eventos discretos es intrínsecamente monolítico (global). En verdad, este no puede ser tratado en general de una forma modular.
Palabras clave: Control, planificación, sistemas de eventos discretos.

A REVIEW OF CONTROL IN DISCRETE EVENT DYNAMICAL SYSTEMS

ABSTRACT

Starting in the 1980s, a theory was proposed for the control of a class of systems, called discrete event systems. Such a theory is generally referred to as supervisory control and is a potential tool for minimizing or eliminating blocking in the aforementioned class of systems. Here the theoretical results are naturally established in the domain of formal languages, while the synthesis and computational results are given in the field of deterministic finite automata. This is crucial as it opens an extension to large-scale systems. In this paper, a review and discussion of supervisory control theory is considered, establishing for this a referential framework that encompasses the most outstanding concepts from its beginning to the present day, which allow us to demonstrate that the concept of blocking in discrete event systems is intrinsically monolithic (global). In truth, this cannot be treated in general in a modular way.
Keywords: control, discrete event systems, planning.

UMA REVISÃO DE CONTROLE EM SISTEMAS DINÁMICOS DE EVENTOS DISCRETOS

RESUMO

A partir da década de 1980, foi proposta uma teoria para o controle de uma classe de sistemas, denominados sistemas a eventos discretos. Tal teoria é geralmente referida como controle supervisório e é uma ferramenta potencial para minimizar ou eliminar bloqueios na classe de sistemas acima mencionada. Aqui os resultados teóricos são estabelecidos naturalmente no domínio das linguagens formais, enquanto os resultados de síntese e computacionais são dados no campo dos autômatos finitos determinísticos. Isso é crucial, pois abre uma extensão para sistemas de grande escala. Neste artigo, é feita uma revisão e discussão da teoria do controle supervisório, estabelecendo para isso um referencial que engloba os conceitos mais destacados desde o seu início até os dias atuais, o que nos permite demonstrar que o conceito de bloqueio em sistemas a eventos discretos é intrinsecamente monolítico (global). Na verdade, isso não pode ser tratado em geral de forma modular.

Palavras chave: controle, planejamento, sistemas de eventos discretos.

Citación sugerida: Demera, C. and Mata, G. Una revisión de control en sistemas dinámicos de eventos discretos. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 239 -255). DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4598

1. INTRODUCCIÓN

Tal como es expuesto en Branicky (1995), un sistema de eventos discretos (*SED*) puede ser descrito como un espacio discreto de estados (configuraciones físicas del sistema en el tiempo) donde los cambios entre estos son producidos por la ocurrencia de eventos (acciones); en consecuencia, entre los tiempos de ocurrencias de cualesquiera dos eventos consecutivos no se expresan cambios en las condiciones lógicas del sistema. Las redes de comunicación, sistemas químicos, distribuidos, logísticos y de transporte, entre otros, son *SED*, Aldaniyazov (2018), Hopcroft y cols. (2008).

Un problema de control en *SED* es la supervisión. Esta es incluida para asegurar el flujo ordenado de eventos que garantice que los procesos concluyan tareas colectivas y minimicen el bloqueo del sistema: objetivo de control. Este formalismo fue iniciado por Whonham y Ramadge en la década de los 80 y actualmente es estudiado extensivamente usando teoría de autómatas y lenguajes, Eilemberg (1974), Alfonseca y cols. (2007), Giró y cols. (2015). La revisión y discusión de la teoría de control supervisorio considerada aquí solo resalta un subconjunto de resultados que se han desarrollado en este campo de investigación: control por realimentación dinámica, lenguajes controlables y no controlables, problemas de control con sus soluciones y control modular. La mayoría de estos resultados pueden ser encontrados en Mata (2017), Ramadge y Wonham (1987) y pueden ser reforzados en Sengupta y Lafortune (1988), Tsitsik (1989) y Wonham y Ramadge (1985). Finalmente, aunque no son tratados aquí, vale la pena enfatizar la investigación sobre el control bajo observación parcial: situación donde el controlador S (supervisor) no vé todos los eventos del sistema $\mathscr{A}$, sino solo un subconjunto adecuado de eventos observables; control descentralizado y la extensión de control supervisorio a *SED* temporales, junto al control en línea con políticas de anticipación limitadas, Kumar (1991), Lin y Wonhan (1988).

2. CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS EN TEORÍA DE CONTROL

El control supervisorio es establecido para satisfacer un conjunto de condiciones cualitativas sobre los lenguajes generado y marcado por el sistema. La premisa es, por razones funcionales del sistema, que algún subconjunto de la dinámica es no admisible, y por lo tanto debe ser eliminado. Así, el control es añadido para reducir el conjunto de sucesiones de eventos que el sistema puede generar a un subconjunto de la dinámica sujeto a condiciones. Más aún, el control también es ejercido para eliminar o minimizar el bloqueo en algunos *SED*. Esto se logra con algunos resultados básicos de la teoría de control supervisorio focalizados sobre la no controlabilidad, pero con énfasis en la realimentación dinámica.

2.1. Producto y composición paralela entre autómatas determinísticos

El producto y la composición paralela son modelos para la representación global de un sistema de eventos discretos que contienen el aspecto de sincronización. En efecto, en el producto las transiciones de los autómatas están siempre sincronizadas por un evento común; mientras que, en la composición paralela un evento común puede ser llevado a cabo si los autómatas dados ejecutan dicho evento simultáneamente. Los otros eventos no están sujetos a esta condición y por lo tanto siempre pueden ser ejecutados, mientras sea posible.

Definición 2.1. *Sean* $\mathscr{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, \mathscr{E}_1, q_{01}, Q_{m1})$ *y* $\mathscr{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, \mathscr{E}_2, q_{02}, Q_{m2})$ *dos autómatas determinísticos, entonces*

(i) *Se llama autómata producto de* $\mathscr{A}_1$ *y* $\mathscr{A}_2$ *al autómata determinístico,* $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$*, definido por:*

$$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 := \mathscr{A}_a(Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \delta, \mathscr{E}, (q_{01}, q_{02}), Q_{m1} \times Q_{m2}),$$

donde $\mathscr{A}_a$ *es la parte accesible,*

$$\delta((q_1,q_2),\alpha) = \begin{cases} (\delta_1(q_1,\alpha), \delta_2(q_2,\alpha)), & \textit{si } \alpha \in \mathscr{E}_1(q_1) \cap \mathscr{E}_2(q_2) \\ \textit{indefinido,} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

y $\mathscr{E}((q_1,q_2)) = \mathscr{E}_1(q_1) \cap \mathscr{E}_2(q_2)$.

(ii) *Se llama composición paralela de* $\mathscr{A}_1$ *y* $\mathscr{A}_2$ *al autómata determinístico,* $\mathscr{A}_1 || \mathscr{A}_2$*, definido por*

$$\mathscr{A}_1 || \mathscr{A}_2 := \mathscr{A}_a(Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, \mathscr{E}, (q_{01}, q_{02}), Q_{m1} \times Q_{m2}),$$

donde

$$\delta((q_1,q_2),\alpha) = \begin{cases} (\delta_1(q_1,\alpha), \delta_2(q_2,\alpha)) & \textit{si } \alpha \in \mathscr{E}_1 q_1) \cap \mathscr{E}_2(q_2) \\ (\delta_1(q_1,\alpha), q_2) & \textit{si } \alpha \in \mathscr{E}_1(q_1) \setminus \Sigma_2 \\ (q_1, \delta_2(q_2,\alpha)) & \textit{si } \alpha \in \mathscr{E}_2(q_2) \setminus \Sigma_1 \\ \textit{indefinido,} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

y $\mathscr{E}((q_1,q_2)) = (\mathscr{E}_1(q_1) \cap \mathscr{E}_2(q_2)) \cup (\mathscr{E}_1(q_1) \setminus \Sigma_2) \cup (\mathscr{E}_2(q_2) \setminus \Sigma_1)$.

Se puede probar sin dificultad que $\mathscr{L}(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2) = \mathscr{L}(\mathscr{A}_1) \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}_2)$ y $\mathscr{L}m(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2) = \mathscr{L}m(\mathscr{A}_1) \cap \mathscr{L}m(\mathscr{A}_2)$.

Por otro lado, las proyecciones naturales $\pi_i : (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \longrightarrow \Sigma_i^*$, $i = 1,2$, son dadas por $\pi_i(\theta) = \theta$,

$$\pi_i(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in \Sigma_i \\ \theta, & \text{si } \alpha \notin \Sigma_i \end{cases},$$

$\pi_i(s\alpha) = \pi_i(s)\pi_i(\alpha)$, $s \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$, $\alpha \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$; y los correspondientes mapeos inversos son dados por $\pi_i^{-1}(t) = \{s \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* : \pi_i(s) = t\}$, $\pi_i^{-1} : \Sigma_i^* \longrightarrow (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$, $i = 1,2$. Finalmente, π_i y π_i^{-1}, $i = 1,2$, son extendidas a lenguajes como sigue:

Para $\mathscr{L} \subseteq (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$, $\pi_i(\mathscr{L}) = \{t \in \Sigma_i^* / \exists s \in \mathscr{L}, \pi_i(s) = t\}$; y para $\mathscr{L}_i \subseteq \Sigma_i^*$,

$$\pi_i^{-1}(\mathscr{L}_i) = \{s \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* : \exists t \in \mathscr{L}_i, \pi_i(s) = t\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}(\mathscr{A}_1 || \mathscr{A}_2) = \pi_1^{-1}(\mathscr{L}(\mathscr{A}_1)) \cap \pi_2^{-1}(\mathscr{L}(\mathscr{A}_2))$$

y

$$\mathscr{L}m(\mathscr{A}_1 || \mathscr{A}_2) = \pi_1^{-1}(\mathscr{L}m(\mathscr{A}_1)) \cap \pi_2^{-1}(\mathscr{L}m(\mathscr{A}_2)).$$

Ahora bien, si $\Sigma_1 = \Sigma_2$ entonces la composición paralela es el producto. En efecto, todas las transiciones son forzadas a ser sincronizadas. Si $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ entonces no hay transiciones sincronizadas y en consecuencia $\mathscr{A}_1 || \mathscr{A}_2$ es el comportamiento concurrente de $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$. Esto último es referido como el shuffle de $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$.

Finalmente, el producto y la composición paralela pueden ser extendidos naturalmente al caso de un número finito de autómatas.

En efecto, si $\{\mathscr{A}_i\}_{i=1}^n$ es una colección finita de autómatas determinísticos con

$$\mathscr{A}_i = (Q_i, \Sigma_i, \delta_i, \mathscr{E}_i, q_{0i}, Q_{mi}), \quad i = 1, \ldots, n$$

entonces el producto de los $\mathscr{A}_i$, denotado por $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathscr{A}_i$ es dada por

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathscr{A}_i = \mathscr{A}_a \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Q_i, \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i, \delta, \mathscr{E}, (q_{01}, \ldots, q_{0n}), \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Q_{mi} \right),$$

donde

$$\delta((q_1, q_2, \ldots, q_n), \alpha) = \begin{cases} (\delta_1(q_1, \alpha), \ldots, \delta_n(q_n, \alpha)), & \text{si } \alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i(q_i) \\ \text{indefinda,} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $\mathscr{E}((q_1, q_2, \ldots, q_n)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i(q_i)$.

Por su parte, la composición paralela de los $\mathscr{A}_i$, denotada $\overset{n}{\underset{i=1}{||}} \mathscr{A}_i$, es dada por

$$\overset{n}{\underset{i=1}{||}} \mathscr{A}_i = \mathscr{A}_a \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Q_i, \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i, \delta, \mathscr{E}, (q_{01}, \ldots, q_{0n}), \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Q_{mi} \right),$$

donde

$$\delta((q_1, q_2, \ldots, q_n), \alpha) = \begin{cases} (\delta_1(q_1, \alpha), \ldots, \delta_n(q_n, \alpha)), & \text{si } \alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i(q_i) \\ (P_1, P_2, \ldots, P_n), \text{ con } P_i = \delta_i(q_i, \alpha), \text{ y } P_j = q_j, & \text{si } \alpha \in \bigcap_{i} \mathscr{E}_i(q_i) \setminus \bigcup_{j: j \neq i} \Sigma_j \\ \text{indefinida,} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además,

$$\mathscr{L}\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathscr{A}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_i(\mathscr{A}_i),$$

$$\mathscr{L}_m\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathscr{A}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_{m_i}(\mathscr{A}_i)$$

y

$$\mathscr{L}\left(\overset{n}{\underset{i=1}{||}} \mathscr{A}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathscr{L}(\mathscr{A}_i)),$$

$$\mathscr{L}_m\left(\overset{n}{\underset{i=1}{||}} \mathscr{A}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathscr{L}_m(\mathscr{A}_i))$$

donde, los $\pi_i : \left(\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i\right)^* \to \Sigma_i^*$, $i = 1, \ldots, n$ son las proyecciones naturales.

2.2. Control en sistemas de eventos discretos

Suponga dado un *SED*, y sea Σ el conjunto de eventos admitidos en el sistema. A un nivel de abstracción lógico, sea $\mathscr{L} = \overline{\mathscr{L}}$ el lenguaje físicamente posible generado por el *SED* y sea $\mathscr{L}_m \subseteq \mathscr{L}$ el lenguaje que representa las completaciones de tareas o logros de objetivos en el *SED*.

Sea $\mathscr{A}$ un autómata determinístico que representa al par de lenguajes $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_m : \mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{A})$ y $\mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \mathscr{L}_m$. En este sentido, se hace referencia al *SED* como $\mathscr{A}$.

Se particiona a Σ en dos subconjuntos $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_{nc}$, donde Σ_c denota al conjunto de eventos controlables; es decir, eventos que pueden ser inhabilitados por un controlador externo; y Σ_{nc} denota al conjunto de eventos no controlables; es decir, eventos cuyas ocurrencias no pueden ser inhabilitadas por control (eventos imposibles de controlar, eventos que no pueden ser inutilizados, entre otros).

Ahora, suponga que la función $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ de $\mathscr{A}$ es controlada por un mecanismo externo, lo cual significa que los eventos en Σ_c podrían ser prevenidos o no en su ocurrencia. Entonces, el autómata determinístico $\mathscr{A}$ puede ser acoplado a un controlador o supervisor S en un lazo de realimentación dinámica (Ver figura 1).

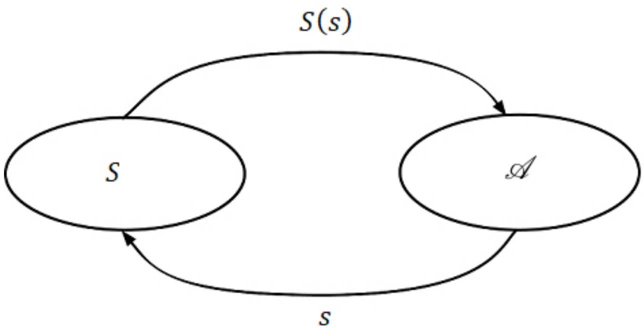

Figura 1. Un proceso de realimentación dinámica

Formalmente,

Definición 2.2. *Sea $\mathscr{A} = (Q, \Sigma, \delta, \mathscr{E}, q_0, Q_m)$ un autómata determinístico, y sea $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_{nc}$ una partición de Σ. Un supervisor S para $\mathscr{A}$ es cualquier función $S : \mathscr{L}(\mathscr{A}) \to \Gamma := \{\gamma \in 2^{\Sigma} : \Sigma_{nc} \subseteq \gamma\}$.*

Para acoplar el controlador o supervisor externo S al autómata determinístico $\mathscr{A}$ se establece lo siguiente:

Si $s \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$, entonces $S(s) \cap \mathscr{E}(\delta(q_0, s))$ es el conjunto de eventos permitidos que $\mathscr{A}$ puede llevar a cabo en el estado $\delta(q_0, s)$, bajo el supervisor S; esto significa que $\mathscr{A}$ no puede ejecutar un evento si simultáneamente este no pertenece a su conjunto de eventos activos y a $S(s)$.

Se llama a $S(s)$ patrón de control en s. Por definición, $\Sigma_{nc} \subseteq S(s) = \gamma \in \Gamma$. Esto asegura que el controlador S no puede inhabilitar a los eventos en Σ_{nc}. En fín, se obtiene un proceso de realimentación dinámica, expresando con esto que el dominio de S es $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y no el conjunto de estados de $\mathscr{A}$. En consecuencia, se puede obtener una variación de los patrones de control a través del paso por los estados en la evolución del sistema $\mathscr{A}$. Luego, el acoplamiento final de $\mathscr{A}$ es denotado $S/\mathscr{A}$.

Definición 2.3. *Sea $\mathscr{A}$ un autómata determinístico con $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_{nc}$ una partición de Σ. Sea S un supervisor para $\mathscr{A}$. El lenguaje generado por $S/\mathscr{A}$ es dado recursivamente por:*

(i) $\theta \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$;

(ii) *Para* $s \in \Sigma^*$ *y* $\alpha \in \Sigma$ *se tiene que:* $s \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, $s\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$, $\alpha \in S(s) \Longleftrightarrow s\alpha \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$.

El lenguaje marcado por $S/\mathscr{A}$ es dado por $\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}) = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$.

Desde la definición 2.3, $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ es cerrado. Además, $\emptyset \subseteq \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})} \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$. En adelante, si $S/\mathscr{A}$ es bloqueado entonces se dice que el supervisor S para $\mathscr{A}$ es bloqueado. Así, por definición de $\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})$ se tiene que sus elementos son aquellos en $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ que preservan las completaciones de tareas bajo el control de S. Entonces, el bloqueo expresa que $S/\mathscr{A}$ no finaliza la ejecución de alguna tarea.

2.3. Planificación

Dado un *SED* $\mathscr{A}$ y sus correspondientes lenguajes generado y marcado $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ respectivamente, referidos como lenguajes no controlados, se hace referencia a un par de lenguajes $\mathscr{L}_p \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ (lenguaje de planificación admisible) y $\mathscr{L}_{p_m} \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ (lenguaje de planificación admisible marcado) para justificar la inclusión de un supervisor o controlador S. $\mathscr{L}_p$ y $\mathscr{L}_{p_m}$ son condicionamientos sobre el sistema; es decir, establecen los requerimientos impuestos sobre el *SED* $\mathscr{A}$. En general, estos requerimientos se expresan a través de uno o más lenguajes, posiblemente marcados, $\mathscr{L}_{Ei}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si los lenguajes $\mathscr{L}_{Ei} \nsubseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ (respectivamente $\mathscr{L}_{Ei} \nsubseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$), entonces se puede escribir apropiadamente

$$\mathscr{L}_p = \mathscr{L}(\mathscr{A}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathscr{L}_{Ei}\right) \quad \left(\text{respectivamente } \mathscr{L}_{p_m} = \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathscr{L}_{Ei}\right)\right).$$

Se asume que la planificación $\mathscr{L}_p$ o $\mathscr{L}_{p_m}$ es dada.

2.4. Lenguajes controlables

Se quiere saber bajo que condiciones un lenguaje de planificación $\mathscr{L}_p$ es ejecutable por un supervisor S.

Definición 2.4. *Dado un SED $\mathscr{A}$ con $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ su conjunto de eventos no controlables. Sea $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$, $K \neq \emptyset$.*

(i) *K es llamado $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado si $K = \overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$;*

(ii) *K es llamado controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc} si $\overline{K}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K}$.*

Observación 2.1. *En la definición 2.4 se enfatiza el concepto básico y fundamental del control supervisorio. En efecto, (ii) expresa que un lenguaje puede ser ejecutado de manera controlada, si y solo si, toda palabra de dicho lenguaje concatenada con un evento no controlable que determina una nueva palabra físicamente posible sigue estando en el lenguaje original. Adicionalmente, K es controlable $\Leftrightarrow \overline{K}$ es controlable.*

Teorema 2.1. (Teorema principal)
Sea $K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$, $K \neq \emptyset$. Sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables de $\mathscr{A}$. Existe un supervisor no bloqueado S para $\mathscr{A}$ tal que $K = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})$, si y solo si, K es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado y controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}.

Demostración. Suponga que existe un supervisor no bloqueado S para $\mathscr{A}$ tal que $K = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})$.

Por definición de $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}), \mathscr{L}(S/\mathscr{A})\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. Luego, del no bloqueo de S se sigue que $\overline{\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})}$; es decir, $\overline{K}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K}$. Por otro lado,

$$K = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}) = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \overline{\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}).$$

Recíprocamente, suponga que K es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado y controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}. Sea S el supervisor para $\mathscr{A}$ definido por $S(s) = \Sigma_{nc} \cup \{\alpha \in \Sigma_c : s\alpha \in \overline{K}\}$.

Afirmación: $\overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. En efecto, por definición de S y controlabilidad de K es claro que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \overline{K}$. Para la otra dirección se procede por inducción sobre la longitud de la palabra. Sea $s \in \overline{K}$, con $|s| = 1$; es decir, $s = \alpha$ para algún $\alpha \in \Sigma$, entonces $s \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. Dado un lenguaje $\mathscr{L} \subseteq \Sigma^*$, sea $\mathscr{L}_i := \{s \in \mathscr{L} : |s| = i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Claramente $\mathscr{L} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathscr{L}_i$.

Suponga que $\mathscr{L}_i(S/\mathscr{A}) = \overline{K}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (hipótesis de inducción). Sea $s \in \mathscr{L}_n(S/\mathscr{A})$ y considere la palabra $s\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$, $\alpha \in \Sigma$. Si $s\alpha \in \overline{K}$ entonces $\alpha \in S(s)$; de donde, $s\alpha \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. Por lo tanto, $\mathscr{L}_{n+1}(S/\mathscr{A}) = \overline{K}_{n+1}$. Luego, $\overline{K} \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. En consecuencia, $\overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$.

Finalmente, desde la afirmación y que K es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado se sigue que

$$K = \overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})$$

y

$$\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = \overline{K} = \overline{\overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})} = \overline{\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})} = \overline{\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})}.$$

□

Corolario 2.1. *Sean $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$, $K \neq \emptyset$, y sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables de $\mathscr{A}$. Existe un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que $K = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, si y solo si, K es cerrado y controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}.*

Demostración. suponga que existe un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que $K = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, entonces obviamente $K = \overline{K}$; es decir, K es cerrado. También, por definición de $\mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, $\mathscr{L}(S/\mathscr{A})\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$; es decir, $\overline{K}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K}$. Así, K es controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}.

Recíprocamente, si K es controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}, y $K = \overline{K}$, entonces tomando el supervisor S definido en la prueba del teorema 2.1 y procediendo de manera análoga se obtiene que $\overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = K$. □

Corolario 2.2. *Sea $K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$, $K \neq \emptyset$, y sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables del SED $\mathscr{A}$. Existe un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que $\overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, si y solo si, K es controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}.*

Demostración. Análoga a la demostración del colorario 2.1 □

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Observación 2.2. *Si $\mathscr{A}$ es un SED y Σ_{nc} es el conjunto de eventos no controlables, entonces $K = \emptyset$ y $K = \mathscr{L}(\mathscr{A})$ son controlables con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc}. De hecho, aunque estos son por definición controlables, ellos corresponden a los casos triviales de controlabilidad: $K = \emptyset$ puede ser interpretado como que el sistema nunca es inicializado y $K = \mathscr{L}(\mathscr{A})$ no juega ningún papel importante.*

Dados un *SED* $\mathscr{A}$ y $K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$, se tiene que K es un lenguaje controlable en relación a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc} siempre que exista un controlador S para $\mathscr{A}$, con $\overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. En lo que sigue se hace referencia a un lenguaje controlable con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y Σ_{nc} como controlable. Más aún, si el no bloqueo es de interés y K es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$-cerrado, entonces $K = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A})$, con S no bloqueado.

Por razones de implementación es necesario establecer una representación del supervisor S a través de un autómata determinístico. Dicho autómata es llamado una realización del supervisor o controlador S. Si los lenguajes $\mathscr{L}(\mathscr{A}), \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ y K son regulares, entonces la realización del controlador S es un autómata finito determinístico, y por lo tanto implementable. En consecuencia, se puede leer en tiempo real el patrón de control de la sucesión de eventos que está siendo ejecutada.

Formalmente, sin perder generalidad suponga que $S : \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \to \Gamma$.

Sea $\mathscr{R} = (X, \Sigma, \delta_{\mathscr{R}}, \mathscr{E}_{\mathscr{R}}, x_0, X)$ un autómata determinístico limpio, con $\overline{K} = \mathscr{L}(\mathscr{R}) = \mathscr{L}_m(\mathscr{R})$. Entonces, para el autómata producto $\mathscr{A} \times \mathscr{R}$ se tiene

$$\mathscr{L}(\mathscr{A} \times \mathscr{R}) = \mathscr{L}(\mathscr{R}) \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \overline{K} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \overline{K} = \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$$

y

$$\mathscr{L}_m(\mathscr{A} \times \mathscr{R}) = \mathscr{L}_m(\mathscr{R}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}).$$

La lectura de lo antes expuesto es que una vez excluidos de $S(s)$ los eventos en Σ_{nc} que no están en $\mathscr{E}(\delta(q_0, s))$, el patrón de control $S(s)$ permanece incluido en la estructura de transición de $\mathscr{R}$. Es decir,

$$S(s) \cap \mathscr{E}(\delta(q_0, s)) = \mathscr{E}_{\mathscr{A} \times \mathscr{R}}(\delta_{\mathscr{A} \times R}((q_0, x_0), s)) = \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(\delta_{\mathscr{R}}(x_0, s)),$$

donde $\mathscr{E}_{\mathscr{A} \times \mathscr{R}}(\delta_{\mathscr{A} \times R}((q_0, x_0), s)) = \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(\delta_{\mathscr{R}}(x_0, s))$ se sigue de $\overline{K} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

Note que $\mathscr{A} \times \mathscr{R}$ está bien determinado sin hacer consideraciones de ningún argumento de control; pero, desde un punto de vista práctico se tiene la siguiente interpretación: Sea $s \in \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$, y sean q y x los estados alcanzados luego de la ejecución de s. Si $\alpha \in \mathscr{E}(q)$ ocurre en $\mathscr{A}$, se tiene igualmente que $\alpha \in \mathscr{E}_{\mathscr{R}}(x)$. Luego, el evento α también ocurre en $\mathscr{R}$ como observador pasivo. Sean $q' = \delta(q_0, \alpha)$ y $x' = \delta_{\mathscr{R}}(x_0, \alpha)$ los estados alcanzados en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{R}$ respectivamente por la ocurrencia de α, entonces el conjunto de eventos activos de $\mathscr{A}$ por $s\alpha$ es el mismo de $\mathscr{R}$ en x'. Por lo tanto, si K es un lenguaje regular, entonces se ha construido un autómata finito determinístico que representa al controlador S.

2.5. Lenguajes no controlables.

En general, los lenguajes de planificación $\mathscr{L}_p$ y $\mathscr{L}_{p_m}$ son no controlables. Por lo tanto, es necesario considerar operaciones sobre esta clase de lenguajes, junto con algunas estructuras matemáticas que nos permita garantizar la controlabilidad óptima.

Teorema 2.2. *Sea $\{K_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de lenguajes, $K_i \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ para todo $i \in I$.*

(i) *Si los K_i son controlables, entonces $\bigcup_{i \in I} K_i$ es controlable.*

(ii) *Si los K_i son controlables y cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} K_i$ es controlable y cerrado*

Demostración. (i) Si $\overline{K_i}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K_i}$ para todo $i \in I$, entonces

$$\left(\overline{\bigcup_{i\in I} K_i}\right)\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \left(\bigcup_{i\in I}\overline{K_i}\right)\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \left(\bigcup_{i\in I}(\overline{K_i}\Sigma_{nc})\right) \cap \mathscr{L}(\mathscr{A})$$
$$= \bigcup_{i\in I}(\overline{K_i}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A})) \subseteq \bigcup_{i\in I}\overline{K_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} K_i}.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} K_i$ es controlable.

(ii) Si $K_i = \overline{K_i}$ para todo $i \in I$, entonces $\overline{\bigcap_{i\in I} K_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{K_i} = \bigcap_{i\in I} K_i$. Así, $\bigcap_{i\in I} K_i$ es cerrado. Adicionalmente, si $\overline{K_i}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K_i}$ para todo $i \in I$, entonces

$$\overline{\bigcap_{i\in I} K_i}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) = \left(\bigcap_{i\in I}\overline{K_i}\right)\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K_j}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K_j}$$

para todo $j \in I$; luego,

$$\overline{\bigcap_{i\in I} K_i}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \bigcap_{i\in I}\overline{K_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} K_i}.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} K_i$ es controlable. □

Sea $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ y considere los conjuntos

$$C_{\subset}(K) := \{\mathscr{L} \subseteq K : \overline{\mathscr{L}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}}\}$$

y

$$C_{\supset}(K) := \{\mathscr{L} : K \subseteq \mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}), \mathscr{L} = \overline{\mathscr{L}}, \overline{\mathscr{L}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}}\}.$$

Claramente $C_{\subset}(K)$ y $C_{\supset}(K)$ son no vacíos ($\emptyset \in C_{\subset}(k)$ y $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \in C_{\supset}(K)$). Más aún, $C_{\subset}(K)$ es un conjunto ordenado parcialmente por $\subseteq$. Luego, por la parte (i) del teorema 2.2 se tiene que $C_{\subset}(K)$ posee como supremo único a $K_{\sup} = \bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} \mathscr{L}$.

Definición 2.5. *Sea $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$. $K_{\sup}$ es llamado el sublenguaje controlable supremo de K.*

Notese que si K es controlable, entonces $K_{\sup} = K$. Ahora, $K_{\sup}$ no necesariamente es cerrado. Por lo tanto, se incluye el teorema siguiente.

Teorema 2.3. (i) *Si $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ es cerrado, entonces $K_{\sup}$ es cerrado;*

(ii) *Si $K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado, entonces $K_{\sup}$ es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado.*

(iii) $\overline{K_{\sup}} \subseteq \overline{K}_{\sup}$.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Demostración. (i) Suponga que $K = \overline{K}$. Entonces, $\mathscr{L} \in C_{\subset}(K)$, si y solo si, $\mathscr{L} \subseteq K$ y $\overline{\mathscr{L}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}}$, si y solo si, $\overline{\mathscr{L}} \subseteq \overline{K} = K$ y $\overline{\overline{\mathscr{L}}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\overline{\mathscr{L}}}$, si y solo si, $\overline{\mathscr{L}} \in C_{\subset}(K)$. Luego,

$$\overline{K_{\text{sup}}} = \overline{\bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} \mathscr{L}} = \bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} \overline{\mathscr{L}} = \bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} \mathscr{L} = K_{\text{sup}}$$

(ii) Suponga que $K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado. Entonces, $\mathscr{L} \in C_{\subset}(K)$ implica que $\overline{\mathscr{L}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) \subseteq \overline{K} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = K$ y $\overline{\mathscr{L}}$ es controlable. Como $\overline{\mathscr{L}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}$ entonces

$$\overline{K_{\text{sup}}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) = \bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} (\overline{\mathscr{L}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})) \subseteq K_{\text{sup}} \subseteq \overline{K_{\text{sup}}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$$

(recuerde que $K_{\text{sup}} \subseteq K \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$). Luego, $K_{\text{sup}} = \overline{K_{\text{sup}}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$. Así, K_{sup} es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado.

(iii) $\mathscr{L} \in C_{\subset}(K) \Longrightarrow \mathscr{L} \subseteq K, \overline{\mathscr{L}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\mathscr{L}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{L}} \subseteq \overline{K}$, $\overline{\overline{\mathscr{L}}}\Sigma_{nc} \cap \mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \overline{\overline{\mathscr{L}}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{L}} \in C_{\subset}(\overline{K})$. Luego, $\overline{K_{\text{sup}}} = \bigcup_{\mathscr{L}\in C_{\subset}(K)} \overline{\mathscr{L}} \subseteq \bigcup_{P\in C_{\subset(\overline{K})}} P = \overline{K}_{\text{sup}}$.

□

Ahora, $C_{\supset}(K)$ es un conjunto ordenado parcialmente por $\subseteq$. Luego, del teorema 2.2 se sigue que $C_{\supset}(K)$ posee como ínfimo único a $K_{\text{ínf}} = \bigcap_{\mathscr{L}\in C_{\supset}(K)} \mathscr{L}$.

Definición 2.6. *Sea $K \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$. El lenguaje K_{inf} es llamado el superlenguaje cerrado y controlable ínfimo de K.*

Observe que $K_{\text{ínf}} = K$ siempre que K sea controlable.
Se puede verificar desde las definiciones que $\emptyset \subseteq K_{\text{sup}} \subseteq K \subseteq \overline{K} \subseteq K_{\text{ínf}} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$.

3. ALGUNOS PROBLEMAS DE CONTROL

Los argumentos teóricos dados en las secciones precedentes permiten sintetizar los controladores que simplifican la existencia y construcción de las realizaciones requeridas, según sea el problema de control a resolver.

Problema básico de Control

Dados un *SED* $\mathscr{A}$, el conjunto de eventos no controlables $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ de $\mathscr{A}$ y una planificación $\mathscr{L}_p = \overline{\mathscr{L}_p} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$, construir un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que:

(i) $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_p$;

(ii) Si S' es otro controlador para $\mathscr{A}$ con $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_p$, entonces $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$.

Solución:

Como $\mathscr{L}_p$ es cerrado entonces $(\mathscr{L}_p)_{\text{sup}}$ es cerrado (ver teorema 2.3, (i)). Luego, $(\mathscr{L}_p)_{\text{sup}} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ es cerrado y controlable. Así, desde el corolario 2.1 se sigue que existe un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_p)_{\text{sup}} \subseteq \mathscr{L}_p$. Más aún, si S' es tal que $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_p$ entonces $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \in C_{\subset}(\mathscr{L}_p)$; pero $(\mathscr{L}_p)_{\text{sup}}$ es el más grande de estos. Por lo tanto, $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. En consecuencia, para la solución del problema básico de control supervisorio, basta tomar S tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_p)_{\text{sup}}$ siempre que $(\mathscr{L}_p)_{\text{sup}} \neq \emptyset$. Finalmente, si $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_p)_{\text{sup}}$ es un lenguaje regular entonces se puede construir una realización del supervisor S, la cual es un autómata finito determinístico (AFD) que representa a $(\mathscr{L}_p)_{\text{sup}}$.

Problema de control sin bloqueo

Dados un SED $\mathscr{A}$, $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ y un lenguaje marcado $\mathscr{L}_{p_m} \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado, construir un supervisor no bloqueado S tal que:

(i) $\mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_{p_m}$;

(ii) Si S' es otro controlador no bloqueado con $\mathscr{L}_m(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_{p_m}$, entonces $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$.

Solución:

Como en el problema anterior, usando los resultados de las secciones precedentes la solución es seleccionar S tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = \overline{(\mathscr{L}_{p_m})_{\text{sup}}}$, siempre que $(\mathscr{L}_{p_m})_{\text{sup}} \neq \emptyset$. Es importante notar que bajo el supuesto que $\mathscr{L}_{p_m}$ es $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado, $(\mathscr{L}_{p_m})_{\text{sup}}$ es igualmente $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})$–cerrado. Esto garantiza que la elección de S resulta en un sistema $S/\mathscr{A}$ no bloqueado (ver teorema 2.1). Ahora, si $(\mathscr{L}_{p_m})_{\text{sup}}$ es regular entonces S puede ser realizado por construcción de una representación AFD de $\overline{(\mathscr{L}_{p_m})_{\text{sup}}}$.

Problema de control dual

Dados un SED $\mathscr{A}$, $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ y un lenguaje requerido mínimo $\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$, construir un supervisor S tal que:

(i) $\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$;

(ii) Si S' es otro controlador con $\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \mathscr{L}(S'/\mathscr{A})$, entonces $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(S'/\mathscr{A})$.

Solución

Por el teorema 2.2, (ii), y la definición de $C_{\supset}(\mathscr{L}_{\text{mín}})$ tenemos que $(\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}}$ es controlable y cerrado. Así, desde el corolario 2.1 se sigue que existe un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}} \supseteq \mathscr{L}_{\text{mín}}$. Por otro lado, si S' es otro supervisor para $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \mathscr{L}(S'/\mathscr{A})$ entonces $\mathscr{L}(S'/\mathscr{A}) \in C_{\supset}(\mathscr{L}_{\text{mín}})$; pero $(\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}}$ es el más pequeño de estos, de donde $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}} \subseteq \mathscr{L}(S'/\mathscr{A})$. Luego, los requerimientos (i) y (ii) son satisfechos por S. Por lo tanto, para la solución óptima del problema de control supervisorio dual basta tomar S tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}}$. Note que si $\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$, entonces

$$\mathscr{L}_{\text{mín}} \subseteq \overline{\mathscr{L}_{\text{mín}}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A}) \subseteq (\mathscr{L}_{\text{mín}})_{\text{ínf}} \cap \mathscr{L}_m(\mathscr{A})) = \mathscr{L}_m(S/\mathscr{A}).$$

Sin embargo, nada asegura que S es no bloqueado. De hecho, la versión sin bloqueo del problema de control supervisorio dual posee dificultades técnicas puesto que la propiedad de controlabilidad no se preserva bajo intersección.

Problema de control con tolerancia

Dados un *SED* $\mathscr{A}, \Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$, un lenguaje marcado deseado $\mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ y una planificación de tolerancia $\mathscr{L}_t = \overline{\mathscr{L}_t} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$, donde $\overline{\mathscr{L}_d} \subseteq \mathscr{L}_t$; construir un supervisor S para $\mathscr{A}$ tal que:

(i) $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_t$;

(ii) Si K es un lenguaje cerrado y controlable con $K \subseteq \mathscr{L}_t$, entonces $K \cap \mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_d$;

(iii) Si K es un lenguaje cerrado y controlable con $K \subseteq \mathscr{L}_t$ y $K \cap \mathscr{L}_d = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_d$, entonces $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq K$.

Solución:

Sea S tal que $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) = ((\mathscr{L}_t)_{\sup} \cap \mathscr{L}_d)_{inf}$ (la existencia de S está garantizada desde los resultados de las secciones previas).

Ahora, como $(\mathscr{L}_t)_{sup}$ es cerrado y controlable, y $(\mathscr{L}_t)_{sup} \cap \mathscr{L}_d \subseteq (\mathscr{L}_t)_{sup}$ entonces $((\mathscr{L}_t)_{sup} \cap \mathscr{L}_d)_{inf} \subseteq (\mathscr{L}_t)_{sup} \subseteq \mathscr{L}_t$. Por otro lado, si $K \subseteq \mathscr{L}_t$ es cerrado y controlable entonces $K \subseteq (\mathscr{L}_t)_{\sup}$; de donde $K \cap \mathscr{L}_d \subseteq (\mathscr{L}_t)_{\sup} \cap \mathscr{L}_d$; luego, $K \cap \mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$. En consecuencia, $K \cap \mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_d$.

Finalmente, en adición a las hipótesis establecidas para K, si $K \cap \mathscr{L}_d = \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_d$ entonces $(\mathscr{L}_t)_{\sup} \cap \mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A})$ implica que $(\mathscr{L}_t)_{\sup} \cap \mathscr{L}_d \subseteq \mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_d = K \cap \mathscr{L}_d \subseteq K$. Por lo tanto, $\mathscr{L}(S/\mathscr{A}) \subseteq K$. Luego, S es solución del problema de control supervisorio con tolerancia. Para finalizar, el supervisor S no necesariamente es no bloqueado. De hecho, la versión sin bloqueo de este problema no posee en general una solución óptima y tiene muchas dificultades técnicas.

4. CONTROL MODULAR

El control modular hace referencia a la situación donde la acción de control del supervisor S es dada por alguna combinación de acciones de control de dos o más supervisores. Aquí se discute la conjunción entre supervisores.

Definición 4.1. *Dados $S_1, S_2, \cdots, S_n$, $n \geq 2$, supervisores definidos para un sed $\mathscr{A}$. Se llama supervisor modular al supervisor $S_{mod} : \mathscr{L}(\mathscr{A}) \to \Gamma$ dado por $S_{mod}(s) = \bigcap_{i=1}^{n} S_i(s)$.*

Proposición 4.1. *El supervisor modular S_{mod} de los S_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ es tal que $\mathscr{L}(S_{mod}/\mathscr{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}(S_i/\mathscr{A})$ y $\mathscr{L}_m(S_{mod}/\mathscr{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_m(S_i/\mathscr{A})$.*

Dadas las realizaciones estándar R_i de los S_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, la realización estándar de S_{mod} puede se construida como $R = \bigtimes_{i=1}^{n} R_i$. Pero se trata precisamente de no construir dicha realización, sino más bien utilizar la existencia de las R_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, y realizar la acción de control S_{mod} considerando la intersección de los conjuntos de eventos activos de los R_i, $i = 1,2,\cdots,n$; en sus respectivos estados después de la ejecución de s. Esta realización es llamada la realización modular del supervisor S_{mod}, la cual reduce su tamaño original. En efecto, si R_i tiene n_i estados, $i = 1,2,\cdots,n$; entonces se necesitan $\sum_{i=1}^{n} n_i$ estados para esta realización modular en lugar de posiblemente, a lo sumo, $\prod_{i=1}^{n} n_i$ estados tal como R. Nótese que se puede interpretar la supervisión de $\mathscr{A}$ por S_{mod} como el producto $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \times \mathscr{A}$. Esto es un argumento de complejidad similar que motiva la síntesis de un supervisor en forma modular.

Si el lenguaje de planificación (admisible) $\mathscr{L}_p$ para el problema básico de control supervisorio puede ser descompuesto como la intersección de n lenguajes cerrados: $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_{p_1} \cap \mathscr{L}_{p_2} \cap \cdots \cap \mathscr{L}_{p_n}$; entonces se puede sintetizar S_i para $(\mathscr{L}_{p_i})_{sup}$, $i = 1,2,\cdots,n$ y usar estos n supervisores en conjunción en lugar de hacer el cálculo directo de $(\mathscr{L}_p)_{sup}$. Al utilizar este enfoque modular, la complejidad computacional total para la síntesis de supervisores es reducida desde $O(n_1 n_2 \cdots n_n m)$ a $O(\text{máx}\{n_1, n_2, \cdots, n_n\} m)$, donde m es el número de estados de $\mathscr{A}$. En fin, este enfoque modular es muy útil puesto que en el caso de lenguajes cerrados $(\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_{p_i})_{sup} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathscr{L}_{p_i})_{sup}$. Esta discusión es formalizada en la versión modular siguiente del problema básico de control supervisorio

4.1. Problema básico de control supervisorio modular

Dados un *SED* $\mathscr{A}$, $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ un conjunto de eventos no controlables y un lenguaje de planificación $\mathscr{L}_p = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_{p_i}$, donde $\mathscr{L}_{p_i} = \overline{\mathscr{L}_{p_i}} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A})$ para $i = 1,2,\cdots,n$, construir un supervisor modular S_{mod} tal que:

1. $\mathscr{L}(S_{mod}/\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}_p$;
2. $\mathscr{L}(S_{mod}/\mathscr{A})$ es óptimo con respecto a $\subseteq$.

Solución:

Se construyen las realizaciones R_i de los S_i, $i = 1,2,\cdots,n$, tales que $\mathscr{L}(S_i/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_{p_i})_{sup}$ y se toma el supervisor modular S_{mod}, entonces $\mathscr{L}(S_{mod}/\mathscr{A}) = (\mathscr{L}_{p_1})_{sup} \cap (\mathscr{L}_{p_2})_{sup} \cap \cdots \cap (\mathscr{L}_{p_n})_{sup} = (\mathscr{L}_{p_1} \cap \cdots \cap \mathscr{L}_{p_n})_{sup} = (\mathscr{L}_p)_{sup}$ es la solución óptima.

Desafortunadamente, este enfoque modular no puede ser extendido a la versión sin bloqueo del problema de control supervisorio básico. La razón es que la conjunción de n supervisores no bloqueados, $n \geq 2$, no necesariamente es no bloqueada. Sin embargo,

Teorema 4.1. *Sean S_i, $i = 1,2,\cdots,n$, supervisores no bloqueados para un SED $\mathscr{A}$. Entonces, S_{mod} es no bloqueado, si y solo si,*

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}(S_i/\mathscr{A})} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{L}(S_i/\mathscr{A})}$$

Este resultado tiene la implicación siguiente. Si se considera la versión modular del problema básico de control supervisorio sin bloqueo donde $\mathscr{L}_{p_m} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}_{p_{m_i}}$, con $\mathscr{L}_{p_{m_i}} \subseteq \mathscr{L}_m(\mathscr{A})$ y $\mathscr{L}_m(\mathscr{A})-$cerrado,

$i=1,2,\cdots,n$ (lo cual implica que $\mathscr{L}_{pm}$ en si mismo es $\mathscr{L}_{pm}(\mathscr{A})-$cerrado), entonces al sintetizar los S_i tales que $\mathscr{L}(S_i/\mathscr{A})=\overline{(\mathscr{L}_{pm_i})_{sup}}$ para $i=1,2,\cdots,n$, se obtiene el supervisor modular S_{mod}; por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(S_{mod}/\mathscr{A}) &= \bigcap_{i=1}^{n}\overline{(\mathscr{L}_{pm_i})_{sup}};\\ \mathscr{L}_m(S_{mod}/\mathscr{A}) &= \left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{(\mathscr{L}_{pm_i})_{sup}}\right)\cap\mathscr{L}_m(\mathscr{A})\\ &= \bigcap_{i=1}^{n}(\mathscr{L}_{pm_i})_{sup}\supseteq\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{L}_{pm_i}\right)_{sup}=(\mathscr{L}_{pm})_{sup}.\end{aligned}$$

Esto significa que el supervisor modular puede ser bloqueado, aunque es admisible en el sentido que $\mathscr{L}_m(S_{mod}/\mathscr{A})\subseteq\mathscr{L}_{pm}$.

Desde los resultados anteriores, el problema básico de control supervisorio sin bloqueo tiene una solución modular sin bloqueo, si y solo si, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{L}_m(S_i/\mathscr{A})}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{\mathscr{L}_m(S_i/\mathscr{A})}\quad(*)$. El problema es que esta última condición no puede ser verificada antes de hacer los cálculos del operador *sup*; sin embargo, para verificar esta condición es necesario examinar simultáneamente a los $(\mathscr{L}_{pm_i})_{sup}$, $i=1,2,\cdots,n$. A diferencia de un enfoque global, como opuesto a modular, se requiere formar la intersección $\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{L}_{pm_i}$ y luego realizar la operación *sup* sobre ese resultado, un cálculo que tiene esencialmente la misma complejidad computacional, en el peor caso, que la verificación de la condición $(*)$. Más aún, el enfoque global garantiza un no bloqueo global; es decir, $\mathscr{L}(S/\mathscr{A})=\overline{(\mathscr{L}_{pm})_{sup}}$; sin embargo, si la solución modular es verdaderamente no bloqueada, entonces como se mencionó anteriormente, sigue siendo ventajosa desde el punto de vista de la implementación. La conclusión de esta discusión es que el concepto de bloqueo es intrínsecamente global; este no puede ser tratado en general de una forma modular.

5. CONCLUSIÓN

Las secciones 3 y 4 demuestran que los problemas de control supervisorio pueden ser resueltos automáticamente por algoritmos que en el peor caso poseen complejidad computacional cuadrática. El resultado final es la realización estándar de un supervisor S que resuelve el problema de control de interés. Los dos ingredientes claves para la aplicación de estos resultados de síntesis son la disponibilidad del autómata que modela el sistema dado y el lenguaje admisible marcado o no. El modelo del *SED* $\mathscr{A}$ es usualmente obtenido por la composición paralela de los modelos individuales $\mathscr{A}_i$ de los subsistemas componentes. Las dificultades típicas encontradas en las aplicaciones en *SED* son:

(i) Seleccionar el nivel de abstracción correcto para el modelo, dadas las especificaciones impuestas sobre el sistema;

(ii) Seleccionar el conjunto de eventos comunes entre las componentes del sistema que apropiadamente capturen el acoplamiento entre estas;

(*iii*) Lidiar con la complejidad computacional resultante del modelo global, la cual crece exponencialmente como función del número de subsistemas.

El segundo ingrediente clave en la teoría de control supervisorio es el autómata H que reconoce al lenguaje admisible. Aquí hay que asegurar el diseño para la síntesis en el sentido que las condiciones o especificaciones en $\mathscr{A}$ son convencionalmente dadas en lenguaje natural con respecto a $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ y no inmediatamente como un autómata. Por lo tanto, se debe construir el autómata requerido que lleve a cabo de forma segura todas las especificaciones o condiciones establecidas para el sistema.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. REFERENCIAS

Aldaniyazov, K. (2018). Main factors for the improvement of a complex system of strategic production cost management. *Revista Espacios*, *39(11)*, pp. 29.

Alfonseca, E., Alfonseca, M., y Moriyón, R. (2007). Teoría de autómatas y lenguajes formales. *McGraw-Hill*.

Branicky, M. (1995). Studies in hibrid systems: Modeling, analysis and control. *PhD thesis, Massachusetts inst technol. Cambridge, Dept. Elec. Fng. And computer Sci.*.

Eilemberg, S. (1974). Automata, languages and machines. *Academic Press, New York*, *Vol. A*.

Giró, J., Vázquez, J., Meloni, B., y Constable, L. (2015). Lenguajes formales y teoría de autómatas. *Alfaomega, Buenos Aires, Argentina*.

Hopcroft, J., Motwani, R., y Ullman, J. (2008). Teoría de autómatas, lenguajes y computación. *Pearson-Addison-Wesley, USA*.

Kumar, R. e. a. (1991). On controllability and normality of discrete event dinamical systems. *Systems and control leters*, *Vol. 17*, pp. 157-168.

Lin, F., y Wonhan, M. (1988). On observability of discrete event systems. *Inform. Sci*.

Mata, G. (2017, enero-abril). Supervisory control application to solving optimal control problems for discrete event systems. *Revista Ingeniería UC*, *Vol.24 núm.1*, pp. 81-90.

Ramadge, P., y Wonham, W. (1987). Supervisory control of a class of discrete event processes. *En: SIAM Journal on control and optimizaion*.

Sengupta, R., y Lafortune, S. (1988). An optimal control theory for diserete event systems. *En: SIAM Journal of control and optimization*.

Tsitsik, J. (1989). On the control of discrete events dinamical systems. *En: Math. of control signals, and systems*, *No. 2*, pp. 95-107.

Wonham, W., y Ramadge, P. (1985). On the supremal controllable sublanguage of a given language. *En: SIAM Journal of control and optimization*.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	**Contribución**
Carla Estefanía Demera Reyna	Desarrollo metodológico, redacción del artículo y desarrollo de resultados teóricos, el bloqueo es un concepto monolítico no local.
Guelvis Enrique Mata Díaz	Revisión conceptual de los argumentos utilizados, dirección de los contenidos y referencias, el bloqueo es un concepto monolítico no local.