UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 327 -337). Edición Contínua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4629

ESTIMADOS INTERIORES L_P PARA FUNCIONES BI-CUATERNIÓNICAS META-REGULARES

María Guadalupe Mendoza Zambrano [1*], José Ramón Játem Lásser [2], Carmen Judith Vanegas Espinoza [3].

[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: mmendoza8070@utm.edu.ec
[2] Profesor colaborador del Postgrado en Matemática, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.
Email: jrjatem@gmail.com
[3]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.
Email: carmen.vanegas@utm.edu.ec

*Autor para correspondencia: mmendoza8070@utm.edu.ec

Recibido: 01-06-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Oswaldo José Larreal Barreto.

Ciencias Matemáticas

RESUMEN

Los bi-cuaterniones son conocidos como el álgebra de los cuaterniones sobre el cuerpo de los números complejos. Ellos son de gran interés de estudio por sus aplicaciones a diferentes áreas de la física como electromagnetismo y mécánica cuántica o en ciencias de la computación en el procesamiento de imágenes por computadora,entre otras. Un estimado interior es una estimación de las derivadas de primer orden de una función que está definida en un subdominio Ω' de Ω, con distancia no nula a la frontera $\partial\Omega$ de Ω. El objetivo de esta investigación es determinar estimados interiores en norma L_p de funciones meta-regulares con valores en los bi-cuaterniones, mediante el uso de representaciones integrales envolviendo soluciones fundamentales de la ecuación $D_\lambda u = (D - \lambda)u = 0$, donde $D = \sum_{j=1}^{3} i_j \partial_j$ es el operador de Moisil-Theodoresco o de Dirac y $\lambda \in \mathbb{C}$, para aplicaciones en los problemas de ecuaciones diferenciales parciales. Este estudio puede servir de modelo para investigar estimados interiores en estas estructuras algebraicas para otros operadores diferenciales parciales inclusive de orden mayor.

Palabras clave: Bi-cuaterniones, Estimados Interiores, Funciones meta-regulares, Norma L_p.

L_P INTERIOR ESTIMATES FOR BI-QUATERNIONIC FUNCTIONS META-REGULAR

ABSTRACT

Bi-quaternions, also known as Algebras over the field of Complex Numbers, are objects of great interests due to its many applications in Physics, in particular in electromagnetism and Quantum Mechanic, also in computer's science, in images processing among other tasks. An interior estimate is an estimation of the first order derivatives of a function defined on a subdomain Ω' of Ω, with non-zero distance to the border $\partial\Omega$ of Ω. The purpose of this research is to establish interior estimates in the L_p norm of meta-regular functions with values on the bi-quaternions, using integral representations involving fundamental solutions of the equation $D_\lambda u = (D - \lambda)u = 0$, where $D = \sum_{j=1}^{3} i_j \partial_j$ is the Moisil-Theodoresco or Dirac operator and $\lambda \in \mathbb{C}$, for applications in several problems of differential partial equations. This work may be a model to study interior estimates in this algebraic structures for other partial differential operators, even of greater order.

Keywords: Bi-quaternions, Interior estimates, Meta-regular functions, L_p-Norm.

ESTIMATIVAS DE INTERIOR L_P PARA FUNÇÕES BI-QUATERNIÓNICAS META-REGULARES

RESUMO

Os bi-quatérnios são conhecidos como a álgebra dos quatérnios sobre o corpo dos números complexos. Eles são de grande interesse de estudo por suas aplicações em diferentes áreas da física como eletromagnetismo e mecânica quântica ou na ciência da computação no processamento de imagens computacionais,entre outras. Uma estimativa interior é uma estimativa das derivadas de primeira ordem de uma função que é definida em um subdomínio Ω' de Ω, com distância diferente de zero até o limite $\partial\Omega$ de Ω. O objetivo desta pesquisa é determinar estimativas interiores na norma L_p de funções metarregulares com valores nos bi-quatérnios, usando representações integrais envolvendo soluções fundamentais da equação $D_\lambda u = (D - \lambda)u = 0$, onde $D = \sum_{j=1}^{3} i_j \partial_j$ é o operador Moisil-Theodoresque ou Dirac e $\lambda \in \mathbb{C}$, para aplicações em diferentes problemas de equações diferenciais parciais. Este estudo pode servir como modelo para investigar estimativas de interiores nestas estruturas algébricas. para outros operadores diferenciais parciais mesmo de ordem superior.

Palavras chave: Bi-quatérnios, Estimativas de Interiores, Funções metarregulares, Norma L_p.

Citación sugerida: Mendoza, G., Jatem, J., Vanegas, J. (2022). ESTIMADOS INTERIORES L_P PARA FUNCIONES BI-CUATERNIÓNICAS META-REGULARES. Revista Bases de la Ciencia, 7(No Especial), Diciembre, 327-337. DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4629

1. INTRODUCCIÓN

Los estimados interiores juegan un papel muy importante en la teoría de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales y no-lineales, ver (Agmon, Douglis y Nirenberg, 1964) y (Tutschke, 1997) y en particular en la resolución de problemas de valores de frontera, ver (Mazya y Rossmann, 2004). Ellos nos proveen las cotas para las derivadas hasta de segundo orden de la solución en ciertos subconjuntos del dominio. En algunos casos en los estimados interiores la norma depende del comportamiento del término fuente y de la continuidad de la solución mientras que en otros la norma depende adicionalmente de la regularidad de los términos de frontera. Podemos decir en general que un estimado interior es una estimación de las derivadas de una función que está definida en un subdominio Ω' del dominio Ω de la función, que posee una distancia positiva a la frontera $\partial\Omega$, es decir, $dist(\Omega';\partial\Omega) > 0$. Se pueden encontrar estimados interiores para funciones que tienen representaciones integrales de frontera o de dominio y son posibles para diferentes normas, (Tutschke e Yüksel, 1999), (Bolívar et al., 2015), (Tutschke y Thanh Van, 2007). Los problemas de valor inicial en el marco de los espacios asociados pueden resolverse utilizando estimaciones interiores para las funciones iniciales que satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales parciales como se estudian en (Tutschke, 1989), (Heersink y Tutschke, 1995), (Tutschke, 2008), (Alayón y J. Vanegas, 2012), (Yüksel y Celebi, 2010), (Bolívar y C. Vanegas, 2013), (Ariza, DiTeodoro y Vanegas, 2017).

En este trabajo se proporcionan estimados interiores para funciones bi-cuaternionicas meta-regulares en la $L_p - norma$. Los estimados interiores son obtenidos mediante representaciones integrales envolviendo soluciones fundamentales.

El desarrollo de este articulo presenta la siguiente estructura: en la sección 2 se establecen las definiciones y teoremas necesarios para hallar la solución del problema planteado; en la sección 3 se presentan algunas desigualdades en los bi-cuaterniones que sirven como base para calcular nuestro estimado interior para funciones bi-cuaterniones meta-regulares, en la sección 4 se encuentran los estimados interiores buscados y finalmente en la sección 5 se encuentran las conclusiones de este trabajo.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Bi-cuaterniones

En esta sección se propone la construcción del álgebra de los cuaterniones, pero sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ y no sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.
Se considera el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^4$, consistente de todas la 4-tuplas complejas o vectores de 4 coordenadas complejas, una de cuyas bases es:

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Se renombran los vectores de B como:

$$1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se define un producto entre los elementos de la base B,

$$\forall X \in B, 1'X = X1' = X,$$

$$I'J = K = -(JI'),$$
$$JK = I' = -(KJ),$$
$$KI' = J = -(I'K) \ y$$
$$\forall X \in B \backslash \{1'\}, X^2 = -1'.$$

Extendiendo este producto a todo $\mathbb{C}^4$, cuidando la linealidad y la distributividad, $\mathbb{C}^4$ resulta que no sólo es un K-espacio vectorial, sino también una $\mathbb{C}$ -álgebra que denotamos con $\mathbb{H}_\mathbb{C}$, los elementos de esta álgebra son los llamados bi-cuaterniones ver (Tian, 2013).
Esta álgebra, al igual que en el caso real, no es conmutativa, porque $I'J = K \neq -K = JI'$, pero a diferencia del caso real no es un anillo de división en el que todo elemento no nulo tiene inverso, pues:

$$(1' + \mathrm{i}\mathrm{I}')(1' - \mathrm{i}\mathrm{I}') = 1' - \mathrm{i}\mathrm{I}' + \mathrm{i}\mathrm{I}' - \mathrm{i}^2\mathrm{I}'^2 = 1' - \mathrm{i}\mathrm{I}' + \mathrm{i}\mathrm{I}' - 1' = 0 .$$

Ya con esto debería bastar para saber que ninguno de los bi-cuaterniones $(1'+iI') \vee (1'-iI')$, es invertible, pero en todo caso, la prueba por reducción al absurdo de que el cuaternión no nulo $(1' - iI')$ no es invertible es como sigue, suponer que $1' - iI'$ es invertible en $\mathbb{H}_\mathbb{C}$, implica la existencia de $\Lambda \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$, es decir:

$$(1' - iI')\Lambda = \Lambda(1' - iI') = 1',$$

pero multiplicando por la izquierda a ambos lados de la igualdad por $(1' + iI')$, se tiene

$$\underbrace{(1' + iI')(1' - \mathrm{i}\mathrm{I}')}_{0}\Lambda = (1' + iI')\,1$$

$$0 = 1 + iI'$$

lo cual es una contradicción.

Dado el bi-cuaternion $u = \sum_{j=0}^{3} u_j i_j$ se define su **norma** por:

$$|u|_B = \sqrt{|u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2}, \tag{2.1}$$

donde $|u_i|^2 = u_i u_i^*$ y u_i^* es la conjugación usual compleja.

Para un bi-cuaternión $\Lambda = (a_0 + a_1 I' + a_2 J + a_3 K)$ se definen a continuación los siguientes conjugados:

* El cuaternión dual de Λ: $\overline{\Lambda} = a_0 - a_1 I' - a_2 J - a_3 K$
* El conjugado complejo de $\Lambda : \Lambda^* : \overline{a_0} + \overline{a_1} I' + \overline{a_2} J + \overline{a_3} K.$

* El conjugado hermítico de $\Lambda : \Lambda^{\#} = \left(\overline{\Lambda}\right)^{*} : \overline{a_0} - \overline{a_1}I' - \overline{a_2}J - \overline{a_3}K.$

Definición 2.1. *Sea $u(x) = \sum_{j=0}^{3} u_j(x)i_j$ se define la norma L_p de $u(x)$ como el máximo de las normas L_p de sus 4 componentes, es decir:*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \max_j \|u_j\|_{L_p(\Omega)}, p > 1. \tag{2.2}$$

Definición 2.2. *Consideramos el operador $D_\lambda = D - \lambda$, donde $D = \sum_{j=1}^{3} i_j\partial_j$ es el operador de Moisil-Theodoresco o de Dirac. Una función u continuamente diferenciable en Ω con valores en $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ se dice que es meta-regular a la izquierda, si satisface la ecuación $(D-\lambda)u = 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\lambda \geq 0$. Similarmente, u se dice que es meta-regular a la derecha si $u(D-\lambda) = 0$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\lambda \geq 0$.*

2.2. Estimados interiores

Considere un problema de valor inicial del tipo

$$\partial_t u = \mathcal{F}u, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

el cual se puede reescribir en la forma integral

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \mathcal{F}u(\tau,x)d\tau, \tag{2.3}$$

donde $\mathcal{F}$ es un operador de primer orden actuando con respecto a la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Sea $u = u(x)$ una función definida en el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supondremos que, Ω' es un subdominio de omega que tiene una distancia positiva desde Ω' hasta $\partial\Omega$. Para resolver la ecuación integro-diferencial (2.3) por el principio de contracción, se necesita una estimación interior del tipo

$$\left\|\partial_{x_j}u\right\|_{\Omega'} \leq \frac{C}{dist(\Omega';\partial\Omega)}\|u\|_{\Omega}, \tag{2.4}$$

donde $\|\cdot\|_{\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\Omega'}$ denotan normas adecuadas con respecto a Ω y Ω' respectivamente y C es una constante independiente de la elección de $u = u(x)$.

3. DESIGUALDADES EN LOS BI-CUATERNIONES

La definición de norma de un bi-cuaternión implica la desigualdad,

$$\left|\int u(x)dx\right|_B \leq \sqrt{2}\int |u(x)|_B dx. \tag{3.1}$$

Este estimado es cierto para integrales de frontera e integrales sobre una región.
Note que para cualquier $v \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ puede representarse como:

$$v = \text{Re}\, v + i\, \text{Im}\, v,$$

donde Re$v = \sum_{k=0}^{3}(\text{Im } v_k)i_k$ y Im$v = \sum_{k=0}^{3}(\text{Re } v_k)i_k$ pertenece a los cuaterniones con entrada reales, denotado como $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$.

Lema 3.1. *Sea $u, v \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, entonces $|u \cdot v| \leq \sqrt{2}|u|_B \cdot |v|_B$.*

Prueba. Denote $a = \text{Re}\, u,\ b = \text{Im}\, u,\ c = \text{Re}\, v,\ d = \text{Im}\, v$ donde:

$$\begin{aligned}
|u \cdot v|_B^2 &= |(a+ib)(c+id)|_B^2 \\
&= |ac - bd + i(bc+ad)|_B^2 \\
&= |ac-bd|^2 + |bc+ad|^2 \\
&\leq 2(|ac|^2 + |bd|^2 + |bc|^2 + |ad|^2) \\
&= 2(|a|^2+|b|^2)(|c|^2+|d|^2) \\
&= 2|u|_B^2 \cdot |v|_B^2.
\end{aligned}$$

□

Para probar la desigualdad de Hölder dada en el próximo Lemma 3.3, se proporciona el siguiente lema, ver (Dudley, 2002):

Lema 3.2. *Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq a\lambda + b(1-\lambda).$$

Lema 3.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $1 < p,\ q < \infty$ exponentes conjugados. Sean f y g funciones medibles con valores en $\mathbb{H}_\mathbb{C}$. Entonces*

$$\|f \cdot g\|_{L_1(\Omega)} = \sqrt{2}\, \|f\|_{L_p(\Omega)}\, \|g\|_{L_q(\Omega)}\,. \tag{3.2}$$

Prueba. Si $\|f\|_{L_p(\Omega)} = 0$ o $\|g\|_{L_q(\Omega)} = 0$ entonces $f = 0$ en casi todas partes o $g = 0$ en casi todas partes, por lo tanto $\|f \cdot g\|_{L_1(\Omega)} = 0$. En el caso $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \infty$ o $\|g\|_{L_q(\Omega)} = \infty$ el resultado se sigue facilmente. Por otro lado, usando el Lema 3.1 y colocando $a = \left|\dfrac{f(x)}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}\right|^p$, $b = \left|\dfrac{g(x)}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}\right|^q$, $\lambda = \dfrac{1}{p}$ y $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$ en el Lema 3.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L_p(\Omega)}} \frac{g(x)}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}\right| &\leq \sqrt{2} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}\right| \left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}\right| \\
&= \sqrt{2} \left[\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sqrt{2} \left[\frac{1}{p}\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}\right|^q\right].
\end{aligned}$$

Integrando ambos lados de esta desigualdad en el dominio Ω, se obtiene

$$\frac{\|f(x) \cdot g(x)\|_{L_1(\Omega)}}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\, \|g\|_{L_q(\Omega)}} \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \sqrt{2},$$

lo que a su vez implica que: $||f \cdot g||_{L_1(\Omega)} \leq \sqrt{2}||f||_{L_p(\Omega)}||g||_{L_q(\Omega)}$. □

4. DESARROLLO

4.1. ESTIMADOS INTERIORES PARA FUNCIONES META-REGULARES EN $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$

4.1.1 Fórmula integral de Cauchy

Un estimado interior es una estimación para las derivadas de las soluciones en subdominios Ω' de Ω, con distancia δ no nula a la frontera $\partial\Omega$ de Ω. En lo siguiente vamos a calcular estimados interiores para funciones bi-cuaternionicas meta-regulares usando representaciones integrales envolviendo soluciones fundamentales.

Una solución fundamental para el operador D_λ viene dada por, ver (Kravchenko, 2003):

$$\begin{aligned} k_\lambda(x) &= -\left(D+\lambda\right)\left(\frac{-e^{i\lambda|x|}}{2\omega_4|x|^2}\right) \\ &= \left(\lambda - \frac{2x}{|x|^2} + i\lambda\frac{x}{|x|}\right)\left(\frac{e^{i\lambda|x|}}{2\omega_4|x|^2}\right). \end{aligned}$$

Para obtener el estimado interior usaremos la siguente fórmula integral de Cauchy.

Teorema 4.1. *Sea $u \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ una función meta-regular a la derecha, entonces*

$$u(\xi) = -\int_\Gamma u(x)\cdot d\sigma \cdot k_\lambda(x,\xi), \forall \xi \in \Omega, \tag{4.1}$$

donde $d\sigma = \sum_{j=0}^{3} n_j i_j d\mu_x$, n es la normal exterior unitaria sobre Γ y $d\mu_x$ es el elemento de la medida escalar de Γ, Dem.: ver (Kravchenko, 2003).

4.2. Derivada de la solución fundamental

Para obtener un estimado interior usando la representación (4.1), se necesita estimar la derivada de la solución fundamental.

Se deriva con respecto a ξ_j:

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_j} k_\lambda(x,\xi) =& \partial_{\xi_j}\left[\left(\frac{\lambda}{|x-\xi|^2} - 2\frac{x-\xi}{|x-\xi|^4} + i\frac{\lambda(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right)\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}\right] \\ =& \partial_{\xi_j}\left(\frac{\lambda}{|x-\xi|^2} - 2\frac{x-\xi}{|x-\xi|^4} + i\frac{\lambda(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right)\left(\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}\right) \\ &+ \left(\frac{\lambda}{|x-\xi|^2} - 2\frac{x-\xi}{|x-\xi|^4} + i\frac{\lambda(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right)\partial_{\xi_j}\left(\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}\right). \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas en cada término se obtiene:

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_j} k_\lambda(x,\xi) =& \Bigg[\lambda(-2)|x-\xi|^{-3}\cdot\frac{(x_j-\xi_j)(-1)}{|x-\xi|} \\
&-\left(\frac{2|x-\xi|^4(-1)-2(x-\xi)4|x-\xi|^3\cdot\dfrac{(x_j-\xi_j)(-1)}{|x-\xi|}}{|x-\xi|^8}\right) \\
&+i\lambda\left(\frac{|x-\xi|^3(-1)-(x-\xi)3|x-\xi|^2\cdot\dfrac{(x_j-\xi_j)(-1)}{|x-\xi|}}{|x-\xi|^6}\right)\Bigg]\left(\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}\right) \\
&+\left(\frac{\lambda}{|x-\xi|^2}-2\frac{x-3}{|x-\xi|^4}+i\frac{\lambda(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right)\left(\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}\cdot\frac{i\lambda(x_j-\xi_j)(-1)}{|x-\xi|}\right) \\
=& \left[\frac{2\lambda(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^4}+\frac{2}{|x-\xi|^4}-\frac{8(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^6}-\frac{i\lambda}{|x-\xi|^3}+\frac{3i\lambda(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^5}\right] \\
&\frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{2\omega_4}-i\lambda\left[\frac{\lambda}{|x-\xi|^3}-\frac{2(x-\xi)}{|x-\xi|^4}+\frac{i\lambda(x-\xi)}{|x-\xi|^3}\right]\frac{(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|}e^{i\lambda|x-\xi|}.
\end{aligned}$$

Lo que a su vez implica

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_j} k_\lambda(x,\xi) =& \frac{2\lambda(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|}+\frac{2}{2\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|}-\frac{8(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^6}e^{i\lambda|x-\xi|} \\
&-\frac{i\lambda}{2\omega_4|x-\xi|^3}e^{i\lambda|x-\xi|}+\frac{3i\lambda(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^5}e^{i\lambda|x-\xi|}-\frac{i\lambda^2(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^3}e^{i\lambda|x-\xi|} \\
&+\frac{2i\lambda(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^5}e^{i\lambda|x-\xi|}+\frac{\lambda^2(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|}\frac{\lambda(x_j-\xi_j)}{\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|} \\
=&+\frac{1}{\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|}-\frac{4(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^6}e^{i\lambda|x-\xi|}-\frac{i\lambda}{2\omega_4|x-\xi|^3}e^{i\lambda|x-\xi|} \\
&+\frac{5i\lambda(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^5}e^{i\lambda|x-\xi|}-\frac{i\lambda^2(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^3}e^{i\lambda|x-\xi|}+\frac{\lambda^2(x-\xi)(x_j-\xi_j)}{2\omega_4|x-\xi|^4}e^{i\lambda|x-\xi|}.
\end{aligned}$$

Considerando $Im\lambda \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
|\partial_{\xi_j} k_\lambda(x,\xi)| \leq& \frac{|\lambda|}{\omega_4}k_e\frac{1}{|x-\xi|^3}+\frac{k_e}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^4}+\frac{4k_e}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^4}+\frac{|\lambda|k_e}{2\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^3} \\
&+\frac{5|\lambda|k_e}{2\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^3}+\frac{|\lambda^2|k_e}{2\omega_4|x-\xi|^2}+\frac{|\lambda|^2k_e}{2\omega_4|x-\xi|^2} \\
=&\frac{4|\lambda|k_e}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^3}+\frac{5k_e}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^4}+\frac{|\lambda^2|k_e}{\omega_4|x-\xi|^2} \\
\leq&\frac{k_m}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^2},
\end{aligned}$$

donde $k_m = max\{4|\lambda|+5+|\lambda^2|\}k_e$ y $k_e = |e^{i\lambda|x|}|$

entoces,

$$|\partial_{\xi_j} k_\lambda(x-\xi)| \leq \frac{k_m}{\omega_4}\frac{1}{|x-\xi|^2} \tag{4.2}$$

4.3. El estimado interior buscado

Ahora vamos a considerar a Ω' un subdominio de Ω que tiene distancia positiva δ a la frontera Γ de Ω, es decir, $\delta = dist(\Omega', \Gamma) > 0$.

Teorema 4.2. *Si $u \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{H}(\mathbb{C})$ es una función meta-regular a derecha, entonces el siguiente estimado interior se obtiene*

$$\left\|\partial_{\xi_j} u\right\|_{Lp(\Omega')} \leq \frac{k}{\delta}\left\|u\right\|_{Lp(\Omega)},$$

donde K es una constante que no depende de la función u y está dada por $K = 4k_m(diam\Omega)^2$, donde $diam\Omega$ denota el diámetro de Ω.

Prueba. De la fórmula integral de Cauchy dada por (4.1) obtenemos:

$$\partial_{\xi_j} u(\xi) = \int_\Gamma u(x)\cdot d\sigma \cdot \partial\xi_j k_\lambda(x,\xi),\ j=0,...,3. \tag{4.3}$$

Sea x un elemento arbitrario en Ω'. Eligiendo $r < \delta$, la bola centrada en x y radio r esta contenida en Ω. Reemplazando $u(x)\cdot d\sigma\cdot\partial\xi_j k_\lambda(x,\xi)$ por $u(x)\cdot N\cdot\partial_{\xi_j}k_\lambda(x,\xi)$ en (4.3) y usando la norma (2.2) se llega a:

$$|\partial_{\xi_j} u(\xi)| \leq \sqrt{2}\int_{|x-\xi|=r}|u(x)\cdot N\cdot\partial_{\xi_j}k_\lambda(x,\xi)|d\mu_x$$

Introduciendo el cambio de coordenadas $\xi' = \xi - x$ y tomando $f(x) = f(\xi-\xi') = u(\xi-\xi')$ y $g(x) = N\partial_{\xi_j}k_\lambda(\xi-\xi',\xi)$ en Lema 3.3, obtenemos

$$|\partial_{\xi_j} u(\xi)| \leq 2\cdot\sqrt{2}\left(\int_{|\xi'|=r}|u(\xi-\xi')|^p d\mu_{\xi'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|\xi'|=r}|\partial_{\xi_j}k_j(\xi-\xi',\xi)|^q d\mu_{\xi'}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.4}$$

Usando la estimación (4.2) y la desigualdad anterior se llega a:

$$\begin{aligned}|\partial_{\xi_j} u(\xi)|^p \leq& (2\sqrt{2})^p\left(\int_{|\xi'|=r}|u(\xi-\xi')|^p d\mu_{\xi'}\right)\frac{{k_m}^p}{\omega_4^p}\left(\frac{1}{r^{2q}}\omega_4 r^3\right)^{\frac{p}{q}}\\ =& (2\sqrt{2})^p\left(\int_{|\xi'|=r}|u(\xi-\xi')|^p d\mu_{\xi'}\right)\frac{{k_m}^p}{\omega_4}(r^{3-2q})^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

Integrando sobre Ω' y cambiando el orden de integración en el lado derecho, se tiene:

$$\left\|\partial_{\xi_j} u\right\|^p_{Lp(\Omega')} \leq (2\sqrt{2})^p\frac{{k_m}^p}{\omega_4}(r^{3-2q})^{\frac{p}{q}}\cdot\omega_4 r^3\left\|u\right\|^p_{Lp(\Omega)}$$

Como $1+\frac{p}{q} = p$ y $3+(3-2q)\frac{p}{q} = 3(1+\frac{p}{q}) - 2p = 3p-2p = p$ se tiene que:

$$\left\|\partial_{\xi_j} u\right\|_{Lp(\Omega')} \leq 2\sqrt{2}k_m r\left\|u\right\|_{Lp(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{2}k_m(diam\Omega)^2}{r}\left\|u\right\|_{Lp(\Omega)},$$

porque $r^2 \leq (diam\Omega)^2$

Haciendo tender r a δ se obtiene

$$\left\|\partial_{\xi_j} u\right\|_{Lp(\Omega')} \leq \frac{2\sqrt{2}k_m(diam\Omega)^2}{\delta}\left\|u\right\|_{Lp(\Omega)}.$$

□

4.4. ESTIMADOS INTERIORES Y PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Los estimados interiores en diferentes normas pueden utilizarse para resolver problemas de valores iniciales en espacios asociados, ver (Tutschke, 2008), (Alayón y J. Vanegas, 2012), (Yüksel y Celebi, 2010), (Bolívar y C. Vanegas, 2013), (Ariza, DiTeodoro y Vanegas, 2017). (C. Vanegas y Vargas, 2018), (Rossodivita y Vanegas, 2017).
Un par $(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ de operadores diferenciales se dice que son asociados si $\mathcal{L}$ transforma las soluciones de $\mathcal{G}u = 0$ en soluciones de esa ecuación. La existencia de un operador diferencial asociado que satisface un estimado interior implica la posibilidad de elegir soluciones arbitrarias de la ecuación diferencial asociada, como funciones iniciales. En consecuencia, los problemas de valor inicial del tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{L}(t, x, u, \partial_{x_j} u) \\ u(0, x) &= \varphi(x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $\varphi(x)$ satisface la ecuación diferencial parcial $\mathcal{G}(u) = 0$, pueden resolverse mediante este enfoque siempre que la función inicial $\varphi(x)$ pertenezca al espacio asociado de $\mathcal{L}$ que contiene todas las soluciones de $\mathcal{G}(u) = 0$ y los elementos del espacio asociado satisfagan un estimado interior. Para ver esto claramente, observamos que las soluciones del problema de valor inicial (4.5) son puntos fijos del operador

$$U(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{F}(\tau, x, u, \partial_{x_j} u) d\tau, \tag{4.6}$$

y recíprocamente, para aplicar un teorema de punto fijo como el principio de contracción de Banach, el operador (4.6) tiene que ser estimado en un espacio de funciones adecuado cuyos elementos dependen de t y x. Como el integrando en (4.6) también depende de las derivadas $\partial_{x_j} u$, esta estimación puede hacerse con la ayuda de los estimados interiores para los elementos del espacio asociado.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos dado estimaciones interiores para funciones valoradas en el álgebra de los bicuaterniones en la norma L_p. Los estimados se han encontrado utilizando representaciones integrales envolviendo soluciones fundamentales. También hemos dado la expresión explícita para la constante que aparece en los estimados interiores. Las funciones con las que hemos trabajado son meta-regulares, pero también es posible encontrar estimados interiores para soluciones de cualquier ecuación diferencial parcial elíptica para la que exista una solución fundamental. Finalmente, nuestros resultados sobre estimados interiores en la norma L_p para funciones meta-regulares con valores en $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, abarcan el caso de estimados interiores en la norma L_p para funciones regulares con valores en $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores expresan no tener conflicto de intereses

7. REFERENCIAS

Agmon, S., Douglis, A., y Nirenberg, L. (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Communications on pure and applied mathematics*, *17*(1), 35-92.

Alayón, D., y Vanegas, J. [J.]. (2012). Operators associated to the Cauchy-Riemann operator in elliptic complex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *22*(2), 257-270.

Ariza, E., DiTeodoro, A., y Vanegas, J. (2017). First Order Differential Operators Associated to the Space of q-Monogenic Functions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *27*, 135-147.

Bolívar, Y., y Vanegas, C. (2013). Initial value problems in Clifford-type analysis. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *58*(4), 557-569.

Bolívar, Y., Ariza, E., L, M., y Vanegas, C. (2015). Interior L_p-Estimates for Functions in Clifford type algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *25*(2), 271-282.

Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press.

Heersink, R., y Tutschke, W. (1995). Solution of initial value problems in associated spaces. *Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations. World Sci. Publ*, 209-219.

Kravchenko, V. (2003). Applied Quaternionic Analysis. *28*.

Mazya, V., y Rossmann, J. (2004). Schauder estimates for solutions to boundary value problems for second order elliptic systems in polyhedral domains. *Applicable Analysis: An International Journal*, *83*(3), 271-308.

Rossodivita, G., y Vanegas, J. (2017). Associated Operators to the Space of Elliptic Generalized-Analytic Functions. En *New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications*. Springer.

Tian, Y. (2013). Biquaternions and their complex matrix representations. *Beitr. Algebra Geom.*, *54*(2), 575-592.

Tutschke, W. (1989). *Solution of initial value problems in classes of generalized analytic functions*. Springer.

Tutschke, W. (1997). Interior estimates in the theory of partial differential equations and their application to initial value problems.

Tutschke, W. (2008). Associated spaces-a new tool of real and complex analysis. En *Function spaces in complex and Clifford analysis* (pp. 253-268). National University Publishers Hanoi.

Tutschke, W., y Thanh Van, N. (2007). Interior estimates in the sup-norm for generalized monogenic functions satisfying a differential Equation with an anti-monogenic right-hand sides. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *52*(5), 367-375.

Tutschke, W., e Yüksel, U. (1999). Interior L_p-estimates for functions with integral representations. *Applicable Analysis*, *73*(1-2), 281-294.

Vanegas, C., y Vargas, F. (2018). Associated Operators to the Space of Meta-q- Monogenic Functions. En *Clifford Analysis and Related Topics. CART 2014. Springer Proceedings in Mathematics Statistics*. Springer, Cham.

Yüksel, U., y Celebi, A. (2010). Solution of initial value problems of Cauchy-Kovalevsky type in the space of generalized monogenic Functions. *Adv. appl. Clifford alg*, *20*(2), 427-444.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Guadalupe Mendoza	Búsqueda bibliográfica, diseño del artículo y redacción.
José Játem	Concepción, revisión, análisis y criterio.
Judith Vanegas	Metodología, Revisión y búsqueda bibliográfica.