UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 213 -226). Edición Contínua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4743.

UNA REVISIÓN DE LA ECUACIÓN DE VAN DER POL Y SUS MODIFICACIONES

Winter Daniel Mendoza Mendoza [1*], **Antonio Ramón Acosta Orellana** [2], **Luis Bladismir Ruiz Leal** [3].

[1] Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: wmendoza0265@utm.edu.ec
[2] Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: aacosta@yachaytech.edu.ec
[3] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: luis.ruiz@utm.edu.ec

*Autor para correspondencia: wmendoza0265@utm.edu.ec

Recibido: 07-06-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza.

RESUMEN

En los años veinte Van der Pol y Van der Mark descubren que la ecuación de segundo orden de oscilación de relajación modelaba el fenómeno generado cuando un marcapasos impulsa a un corazón real. Esto generó gran interés en el estudio de la ecuación de Van der Pol y Van der Mark, desde entonces se han realizado una gran variedad de modificaciones a la ecuación con la finalidad de obtener mejores resultados del estudio de la dinámica de ritmos cardiacos, modelar fenómenos físicos y biológicos entre otros. Este trabajo exhibe una revisión y evolución de la ecuación de Van der Pol desde sus inicios hasta la actualidad enfocado en aquellas ecuaciones de segundo orden relacionadas con la dinámica del ritmo cardiaco. Se destaca la aparición de la llamada ecuación modificada de Van der Pol a partir de los años noventa hasta la actualidad.
Palabras clave: Ciclo Límite, Ecuación de Van der Pol, Ecuación Modificada de Van der Pol y Oscilador de Relajación.

REVIEW OF THE VAN DER POL EQUATION AND ITS MODIFICATIONS

ABSTRACT

In the twenties Van der Pol and Van der Mark discovered that the second-order relaxation oscillation equation modeled the phenomenon generated when a pacemaker drives a real heart. This generated great interest in the study of the Van der Pol and Van der Mark equation, since then a great variety of modifications have been made to the equation with the purpose of obtaining better results in the study of the dynamics of cardiac rhythms, modeling physical and biological phenomena, among others. This work presents a review and evolution of the Van der Pol equation from its beginnings to the present time, focusing on those second order equations related to heart rate dynamics. The appearance of the so-called modified Van der Pol equation from the nineties to the present is highlighted.
Keywords: Limit Cycle, Van der Pol Equation, Modified Van der Pol Equation and Relaxation Oscillator.

UNE REVUE DE L'EQUATION DE VAN DER POL ET DE SES MODIFICATIONS

RESUMO

Na década de 1920, Van der Pol e Van der Mark descobriram que a equação de oscilação de relaxamento de segunda ordem modelou o fenómeno gerado quando um pacemaker conduz um coração real. Isto gerou um grande interesse no estudo da equação de Van der Pol e Van der Mark, desde então foi feita uma grande variedade de modificações na equação a fim de obter melhores resultados no estudo da dinâmica dos ritmos cardíacos, modelando fenómenos físicos e biológicos, entre outros. Este documento apresenta uma revisão e evolução da equação Van der Pol desde o seu início até aos nossos dias, centrando-se nas equações de segunda ordem relacionadas com a dinâmica do ritmo cardíaco. Destaca o aparecimento da chamada equação Van der Pol modificada desde os anos 90 até aos dias de hoje.
Palavras chave: Ciclo Limite, Equação de Van der Pol, Equação de Van der Pol modificada e oscilador de relaxação.

Citación sugerida: Mendoza, W., Acosta, A., Ruiz, L. (2022). Una revisión de la ecuación de Van der Pol y sus modificaciones. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 7, (No. Especial), Diciembre, 213-226. DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4743.

1. INTRODUCCIÓN

Balthasar Van der Pol en sus estudios teóricos y prácticos de la transmisión de ondas cortas de radio en teoría de circuito, diseñó un oscilador con triodos observando que las oscilaciones de las señales, para algunos parámetros, tendían a estabilizarse a lo largo del tiempo. En ese estudio que va desde 1919 hasta 1926 Van der Pol modela sus circuitos por varias ecuaciones diferenciales de orden dos autónomas (Ginoux, 2017), que en su trabajo de 1926 simplificó y presentó en una sola ecuación de la forma:

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$$

donde mostró de manera experimental la existencia de un ciclo límite estable (Balth. van der Pol, 1926).

Van der Pol y Van der Mark estudiaron el rango de estabilidad de la dinámica del corazón por medio de la ecuación:

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

En su investigación, al agregar una señal de conducción externa ω^2 todos los resultados obtenidos fueron análogos a la situación en la que un marcapasos impulsa un corazón real. En realidad ellos estaban interesados en cómo estabilizar los latidos irregulares o arritmias de un corazón (Balth. van der Pol y van der Mark, 1928). Estos hallazgos generaron gran interés entre la comunidad científica, incluyendo la comunidad matemática.

En las siguientes décadas los autores (Levinson y Smith, 1942),(Cartwright y Littlewood, 1945) y (Levinson, 1949) realizaron avances, teóricos desde el punto de vista matemático, en las ecuaciones diferenciales de segundo orden que de alguna forma generalizaban las dos ecuaciones mencionadas anteriormente trabajando en oscilaciones de relajación, y así consideraron las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

$$\ddot{x} + \alpha\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = b\lambda\alpha\cos\lambda t$$

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + x = c\sin(t)$$

para la cuales se afirman, la existencia de un ciclo límite cuya demostración en principio es bastante complicada pero, al pasar el tiempo, se desarrollaron herramientas para obtener una demostración más simple.

Años más tarde (Katholi, Urthaler, Macy y James, 1977) acoplaron la ecuación de Van der Pol de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \alpha_1\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = G_1(x, y)$$

$$\ddot{y} + \alpha_2\left(y^2 - 1\right)\dot{y} + y = G_2(x, y)$$

introduciendo retraso en el tiempo para un estudio de frecuencia de los marcapasos, mientras (West, Goldberger, Rovner y Bhargava, 1985) realizó un estudio numérico de la ecuación anterior acoplada linealmente con una resistencia. Existen varios autores estudiando la ecuación de Van der Pol, con pequeñas modificaciones de forma acoplada como modelo en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería (Low, Reinhall, Storti y Goldman, 2006), (Cardarilli et al., 2019), (E. Ryzhii y M. Ryzhii, 2014), (Dixit, Sharma y Shrimali, 2019) y (A.P. Kuznetsov and N.V. Stankevich and L.V. Turukina, 2009).

Otros estudios de modificaciones de la ecuación de Van der Pol, tales como la ubicación de la zona donde aparece el ciclo límite, la cantidad de ciclos límites, bifurcaciones, variedades estable e inestable y caos (Giacomini y Neukirch, 1997) han sido considerados.

El modelo de la ecuación de Van der Pol y las modificaciones de la misma se han usado para diferentes estudios en diferentes áreas, lo que hace complicado estudiar las diferentes modificaciones a la ecuación de Van der Pol.

Además las formas acopladas también hacen complicado, tener un estudio de la dinámica de sus soluciones.

Ya que los modelos acoplados y no autónomos de la ecuación de Van der Pol como los estudiados por (Levinson y Smith, 1942),(Cartwright y Littlewood, 1945) y (Levinson, 1949) son bastante complicados, junto a las diferentes áreas en la que se ha usado, es natural preguntarse si ha existido una línea de investigación que se quede con la ecuación de segundo orden autónoma con pequeñas modificaciones y que modele la dinámica del ritmo cardiaco como originalmente fue estudiado por Van der Pol y Van der Mark.

En esta revisión bibliográfica hemos dado respuesta a la pregunta establecida al parrafo anterior. En efecto, verificamos que (Grudziński y Żebrowski, 2004) presenta una modificación de la ecuación de Van der Pol de segundo orden motivado por (Postnov, Han y Kook, 1999) donde presenta una sola ecuación más simple de la ecuación de Van der Pol de esta forma:

$$\ddot{x} + \alpha \left(x^2 - v^2\right) \dot{x} + \frac{x\,(x+d)\,(x+e)}{ed} = 0$$

a partir de aquí se ha usado este modelo más simple para estudiar la ecuación de Van der Pol.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la primera parte se habla de la vida de Van der Pol, después una segunda parte da inicio a la ecuación de Van der Pol con avances teóricos y prácticos, por último se habla de algunos modelos de la ecuación modificada de Van der Pol.

2. METODOLOGÍA

Para la obtención de información necesaria que respalde teóricamente la investigación se utilizó el método bibliografico, que conlleva a obtener información de diversas fuentes como catálogos, repositorios, buscadores, bases de datos, textos, etc; ver (Martín y Lafuente, 2017). Su principal caracteristica es que implica la búsqueda, detección y selección de información.

3. DESARROLLO

3.1. Conceptos

(Conjuntos límite) Dada una órbita $\gamma\left(x_0\right)$ definida en (α, β), donde α puede ser $-\infty$ y β puede ser $+\infty$, y sea $\varphi(t,p)$ una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

1. Un punto y es llamado un punto ω - límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ si existe una sucesión de tiempos $t_j \to \beta^-$ tal que $\lim_{j\to+\infty} \varphi\left(t_j, x_0\right) = y$. El conjunto de todos los puntos ω - límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ se denomina conjunto ω-límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ y se denota por $\omega\left(x_0\right)$.

2. Un punto y es llamado un punto α - límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ si existe una sucesión de tiempos $t_j \to \alpha^+$ tal que $\lim_{j\to-\infty} \varphi\left(t_j, x_0\right) = y$. El conjunto de todos los puntos α - límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ se denomina conjunto α-límite de la órbita $\gamma\left(x_0\right)$ y se denota por $\alpha\left(x_0\right)$.

(Aplicación de Poincaré) Sea $\varphi(t,p)$ una solución periódica con periodo mínimo T de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y denotemos la órbita periódica correspondiente por Γ. Sea un vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que, v y el vector tangente $f(p)$ de Γ en p sean linealmente independientes. Sea L_ϵ el segmento dado por:

$$L_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x = p + \alpha v, 0 \leq |\alpha| \leq \epsilon\right\}$$

El segmento L_ϵ se denomina sección trasversal de la órbita periódica Γ y es dado como:

$$\begin{aligned} \Pi : \quad & L_\delta \to L_\epsilon \\ x_0 \mapsto & \varphi\left(T\left(x_0\right), x_0\right) \end{aligned}$$

La órbita periódica Γ a través del punto p se dice que es hiperbólica si p es un punto fijo hiperbólico de la aplicación de Poinacaré Π, es decir, $\Pi(p) = p$ y $\dot{\Pi}(p) \neq 1$.
(Ciclo límite) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1. Una órbita periódica Γ de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ se llama ciclo límite si existe una vecindad V de Γ tal que Γ es la única órbita cerrada de la ecuación que intersecta V. Además, existen los siguientes tipos de ciclos límites:

a) Estable o conductor: $\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t,p),\Gamma) = 0$ para todo $p \in V$;

b) Inestable: $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,p),\Gamma) = 0$ para todo $p \in V$;

c) Semi – estable: $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,p),\Gamma) = 0$ para todo $p \in V \cap Ext\Gamma$ y $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,p),\Gamma) = 0$ para todo $p \in V \cap \mathrm{Int}\,\Gamma$, o lo contrario.

3.2. Balthazar Van der Pol

Balthazar Van der Pol nació el 27 de enero de 1889 en Utrecht, Holanda. En 1911 ingresó en la Facultad de Física de la Universidad de Utrecht, en la cual recibe un diploma con distinción en 1916. Desde 1916 hasta 1919 estudió física experimental en Inglaterra; en aquel tiempo van der Pol conoció y se hizo amigo de Edward Appleton, que treinta años después, en 1947, recibió el Premio Nobel de Física por sus contribuciones a la comprensión de la ionosfera.

Van der Pol inició su trabajo en radio en Cambridge y estuvo bajo dos encabezados: experimental y teórico.

Van der Pol se familiarizó con el trabajo teórico sobre la difracción de ondas de radio alrededor de una tierra conductora y lo utilizó para hacer una comparación directa entre (a) la intensidad de la señal predicha y (b) la intensidad de la señal recibida, en el caso práctico trabajó en la Transmisión de radio.

En 1919, fue nombrado miembro del Museo Teylers en Haarlem. Realizó investigaciones en óptica, electromagnetismo, ondas de radio, física atómica y la constante dieléctrica del aire ionizado; esas áreas formaron la base de su tesis doctoral.

Fue galardonado con el grado de doctor en ciencias por la Universidad de Utrecht en Holanda, el 27 de abril de 1920.

Morris Kline (J.J.O'Connor y E.F.Robertson, 2008) afirma: El trabajo científico de Balthasar Van der Pol cubrió matemáticas puras, matemáticas aplicadas, radio e ingeniería eléctrica, incluso en matemáticas, sus trabajos cubrieron teoría de números, funciones especiales, cálculo operacional y ecuaciones diferenciales no lineales, en este último campo fue pionero.

H. Bremmer enumera las principales contribuciones de Van der Pol bajo los títulos: propagación de ondas de radio; circuitos no lineales: oscilaciones de relajación; fenómenos transitorios y cálculo operacional; además, H. Bremmer junto con Van der Pol trabajaron en la redacción de un libro titulado:

Cálculo operacional: basado en la integral de Laplace de dos caras.

Este libro no fue el primer trabajo conjunto sobre el cálculo operacional, si no también publicaron dos artículos sobre el mismo tema.

Para la mayoría de los matemáticos, el nombre de Van der Pol está asociado con la ecuación diferencial que ahora lleva su nombre. Esta ecuación apareció por primera vez en su artículo sobre la oscilación de relajación.

Los primeros intentos de resolver problemas no lineales de la teoría de las oscilaciones. La primera observación de la inaplicabilidad de la teoría lineal a problemas de este tipo fue hecha en ingeniería de radio por Van der Pol. La historia del desarrollo de la ecuación que lleva su nombre, y también los orígenes del método de encontrar la primera aproximación a la solución de esta ecuación (el método de coeficientes de variación lenta).

Sin embargo, la rama de la teoría de números que estaba más cerca de su corazón era la teoría y las aplicaciones de las funciones theta. La cual publicó cuatro artículos con el mismo tema.

Mary Cartwright da una lista completa de los honores que fueron otorgados a Van der Pol.

Van der Pol recibió la Medalla de oro Waldemar Poulsen otorgada por la Academia Danesa de Ciencias Técnicas y Medalla de Honor del Instituto Americano de Radio ingenieros, entre muchos otros honores, para una lista completa de los diferentes honores recibidos.
Balthazar Van der Pol murió a la edad de 70 años el 6 de octubre de 1959 en Wassenar, Holanda.

Para mayor detalle ver: (J.J.O'Connor y E.F.Robertson, 2008).

3.3. Desde 1920 - 1939

Van der Pol construyó un oscilador como resultado de un circuito de radio de onda corta usando un tríodo o tetrodo. La fabricación del oscilador con circuitos eléctricos se hizo más simple, en la que se da por un intercambio de energía entre elementos de distinta naturaleza, como son de capacitor a inductor o de inductor a capacitor. El diodo funciona como un elemento activo y ayuda a mantener la oscilación.ver: (Ginoux y Letellier, 2012).

La simplicidad viene dada con elementos eléctricos activos con propiedad cubica no lineal $i = \varphi(v) = \gamma v^3 - \alpha v$,donde i es la corriente y v el voltaje.

Van der Pol en su trabajo (Balth. van der Pol, 1926) lo usa para describir un circuito eléctrico por medio de la ecuación

$$\ddot{x} - \alpha \left(1 - x^2\right) \dot{x} + x = 0 \tag{3.1}$$

conocida como ecuación de Van der Pol u oscilador de Van der Pol, donde x es la variable dinámica del circuito y α el parámetro de amortiguamiento no lineal positivo.

La función $f(x) = -\alpha\left(1 - x^2\right) = \alpha\left(1 - x^2\right)$ es el coeficiente de amortiguamiento el cual es positivo si $|x| > 1$ y negativo si $|x| < 1$.

El caso en el que la amortiguación es positiva $(f(x) > 0)$ corresponde a la reducción de energía y de la amplitud, mientras que la amortiguación negativa corresponde a la situación en la que aumenta la energía al sistema y aumenta la amplitud. (Zduniak, Bodnar y Foryś, 2014).

El oscilador de Van der Pol tiene el origen como único punto de equilibrio visto como un sistema de ecuación equivalente de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha\left(x^2-1\right)-x \end{aligned} \tag{3.2}$$

En la ecuación (3.2) $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable que para $\alpha^2-4<0$ es una espiral.

Dos años después Van der Pol y Van der Mark (Balth. van der Pol y van der Mark, 1928) realizan la primera modificación de la ecuación (3.1) de la forma:

$$\ddot{x}-\alpha\left(1-x^2\right)\dot{x}+\omega^2 x=0 \tag{3.3}$$

donde ω es la frecuencia, el cual es el nuevo parámetro agregado. Obtuvieron esta ecuación en el estudio de modelos eléctricos de los latidos del corazón según (Suarez, Mesahuanca, Hernandez y Felipe Tolentino, 2020).

Las investigaciones de Van der Pol y Van der Mark al agregar el parámetro a la ecuación modelaba la situación en que un marcapasos impulsa un corazón real.

En este mismo trabajo ellos observan la existencia de un ciclo límite para la ecuación (3.3) buscando rasgos de estabilidad de la dinámica del corazón.

Para valores pequeños de α en la ecuación (3.1) Van der Pol observó que el oscilador se estabilizaba, esto es, lo que hoy conocemos como ciclo límite estable.

En 1928 Lineard en su artículo (Ginoux, 2017) plantea una ecuación de segundo orden mucho más amplia que la ecuación de Van der Pol (3.1) de la forma:

$$\ddot{x}+F(x)\dot{x}+G(x)=0 \tag{3.4}$$

donde G es una función impar con $G(x)>0$ si $x>0$. Lineard da condiciones para que la ecuación (3.4) posea un único ciclo límite estable. Estas condiciones son para $\phi(x)=\int_0^x \mathrm{F}(t)dt$.

1. ϕ es una función impar.
2. $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$.
3. Exite $p>0$ tal que $\phi(x)<0$ si $0<x<p$, $\phi(x)>0$ si $x>p$ y ϕ es creciente en $(p,+\infty)$.

Claramente la ecuación (3.1) satisface la ecuación y las condiciones de Lineard, lo que implica que la ecuacion de Van der Pol (3.1) posee un único ciclo límite estable, lo que habia observado Van der Pol con sus experimentos.

Este hecho matemático es observado más tarde por el mismo Van der Pol en su trabajo (Van der Pol 1934, Pg. 1076).

Note que, también la ecuación (3.3) (modificación de la ecuación (3.1)) estudiada por Van der Pol y Van der Mark, satisface la ecuación (3.4) por tanto posee un único ciclo límite estable.

Según (Ginoux, 2017) Lineard usa argumentos muy parecidos a los usados por Poincaré en 1908 para probar la existencia de un ciclo límite de la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \alpha\theta(y) \end{aligned}$$

A principios de la década de 1930, el ingeniero francés Philippe Le Corbeiller (1891-1930), colaborador de Van der Pol durante sus conferencias en Francia, contribuyó a popularizar el concepto de oscilaciones de relajación. Con tal presentación, Van der Pol se presentó como el principal contribuyente que desencadenó el enfoque interesante (antes fue la ciencia ”vieja”, después fue la ciencia ”moderna”). De hecho, esto se basa únicamente en la palabra ”relajación”. Cuando habló de trabajos anteriores, solo se mencionaron las evidencias experimentales que respaldan la teoría de la relajación de van der Pol. (Ginoux y Letellier, 2012).

Van der Pol y Bremmer en un conjunto de artículos redactados entre 1937 y 1939 demostraron la forma de calcular las intensidades de campo en puntos distantes situados sobre la superficie de la Tierra esférica utilizando series de residuales, en la que se consideró la difracción alrededor de una esfera de ondas que se originan en una fuente puntual a partir de la serie armónica (3.1); por lo tanto, una transformación de esta serie se afectó con la ayuda de una integral de contorno. ver: (Balth van der Pol y Bremmer, 1937)

Van der Pol en su trabajo (B. van der Pol, 1934) formaliza parte de sus estudios con relación a las ecuaciones de relajación como fueron las siguientes ecuaciones que se pueden ver como modificación de la ecuación (3.1).

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega^2 x = 0 :$$

Asociado a un oscilador triodo con un grado de libertad, oscilaciones libres,

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2 - \varepsilon x^4\right)\dot{x} + \omega^2 x = 0 :$$

Igual que antes, pero con dos términos más en la aproximación a la característica,

$$\ddot{x_1} - \alpha_1\left(1 - x_1^2\right)\dot{x_1} + \omega_1^2 x_1 + k_1\omega_1^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x_2} + \alpha_2\dot{x_2} + \omega_2^2 x_2 + k_2\omega_2^2 x_1 = 0 :$$

Asociado a un oscilador triodo con dos grados de libertad (circuitos acoplados).

$$\ddot{x} - \alpha\left(1 - x^2\right)\dot{x} + \omega^2 x = \omega_1^2 E \sin\omega_1 t : \tag{3.5}$$

Asociado a un oscilador triodo con fuerza electromotriz externa.

En todos el observa de forma experimental que existen parámetros donde las ecuaciones exhiben un ciclo límite.

3.4. Desde 1940 - 1969

Debido al origen de la ecuación (3.1) y (3.3) en el estudio de ondas cortas de radio y la dinámica de los latidos del corazón, se produce un interes en la comunidad de los matemáticos de la época para realizar avances en las ecuaciones diferenciales de segundo orden que de alguna forma generalizaba la ecuación (3.1) que fueron publicados en las siguientes décadas (Levinson y Smith, 1942),(Cartwright y Littlewood, 1945) y (Levinson, 1949).

(Levinson y Smith, 1942) describen la importancia de las oscilaciones de relajación y proponen considerar la ecuación generalizada

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

donde $f(x, \dot{x})$ es el coeficiente de amortiguamiento y $g(x)$ es positivo cuando $x > 0$, negativo cuando $x < 0$, $\int_0^{\infty} \mathrm{g}(x)dx = \infty$, $\int_0^{-\infty} \mathrm{g}(x)dx = \infty$, f es derivable, con derivada continua y otros consideraciones para la función f prueba de forma analítica la existencia de la única solución periódica o ciclo límite.

(Cartwright y Littlewood, 1945) se limitaron a estudiar la ecuación con la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \alpha\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = b\lambda\alpha \cos \lambda t$$

donde f, g, x son reales y analíticas, P es una función real analítica periódica, $\lim_{y \to \underline{+}\infty} inf f > 0$ para $f(x) = -K(1 - x^2)$ y $P(x) = b\lambda K \cos(\lambda t + \alpha)$.

La ecuación se convierte en la ecuación (3.5) estudiada por (Balth. van der Pol y van der Mark, 1928) y (Cartwright y Littlewood, 1945) nombraron, lo que Van der Pol intuyo de forma experimental, que para $b > \frac{2}{3}$ y K suficientemente grande la ecuación (3.5) posee un ciclo límite estable.

También prueban que, existe $\delta > 0$ tal que para $b \in (\delta, \frac{2}{3} - \delta)$ y K con valores grandes, existe un ciclo límite inestable.

Además expresan que existen valores del parámetro con una dinámica muy rica pero que para ese momento ellos no podian describir.

Cuatro años después (Levinson, 1949), anunció algunos resultados de la ecuación de segundo orden con singularidad

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + x = c\sin(t)$$

y afirma que se obtienen los mismos resultados de Cartwright y Littlewood pero con una demostración más simple.

(Grant, 1956) estudia un modelo acoplado de dos ecuaciones del tipo propuesto por Van der Pol y Van der Mark obteniendo resultados similares.

En 1961 (FitzHugh, 1961) propone una modificación de la ecuación (3.1) de Van der Pol para entender y explicar el modelo de la ecuación Hodgkin – Huxley (1952) asociada con el comportamiento de una membrana nerviosa

$$\dot{x} = c\left(y + x - \frac{x^3}{3} + z\right)$$
$$\dot{y} = \frac{-(x - a + by)}{c}$$

donde:

$$1 - 2b/3 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad b < c^2$$

3.5. Desde 1970 - 1989

(Katholi, Urthaler, Macy y James, 1977) exhibe un modelo acoplado de la ecuación de Van der Pol de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha_1 \left(x^2 - 1\right) \dot{x} + x = G_1(x, y) \\ \ddot{y} + \alpha_2 \left(y^2 - 1\right) \dot{y} + y = G_2(x, y) \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde G_1 y G_2 son funciones de acoplamiento débil que permiten la introducción del retraso en el tiempo y que representa fenómenos de conducción directa y realimentación, para el estudio de frecuencia de los marcapasos sobre la naturaleza de los ritmos de forma numérica y observaron que el modelo reproduce satisfactoriamente los experimentos realizados previamente (en el laboratorio) con perros.

Según (West, Goldberger, Rovner y Bhargava, 1985) el modelo acoplado de dos ecuaciones, modificados de Van der Pol (ver la ecuación (3.6) propuesta por Katholi en 1977) supuso un importante avance en el estudio de la dinámica no lineal del comportamiento cardiaco.

(West, Goldberger, Rovner y Bhargava, 1985) realizan un estudio numérico de una modificación de la ecuación acoplada (3.6) presentada usando las leyes de Kirchhoff de la forma:

$$\begin{aligned} L_1\dot{I}_1(t) + (R_1 + R)\, I_1(t) + RI_2(t) + [V_1(t) - V_0 = 0] \\ L_2\dot{I}_2(t) + (R_2 + R)\, I_2(t) + RI_1(t) + [V_2(t) - V_0 = 0] \end{aligned}$$

Esta dos ecuaciones de un sistema acopladas: La ecuación uno de I_2 depende $\dot{I}_1$ y la ecuación dos de I_1 depende $\dot{I}_2$; Por lo tanto, los dos osciladores están acoplados linealmente con una resistencia. El modelo para parámetros lejos de la zona donde existe el punto crítico, muestra la existencia de una posible bifurcación de periodo doble.

3.6. Desde 1990 hasta la Actualidad.

(Giacomini y Neukirch, 1997) considera una modificación de la ecuación de Van der Pol (3.1) de la forma:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{3.7}$$

donde $g(x) = x$ y $F(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)dt$ es un polinomio impar de grado m.

Giacomini realiza un estudio para determinar el número de ciclos límites dependiendo del polinomio F y determina la región en el espacio de fase de dicho ciclo límite, hasta ese momento según Giacomini para $F(x) = a_1x + a_3x^3$ la ecuación (3.7) posee un único ciclo límite si $a_1a_3 < 0$; además, la ecuación (3.7) no tiene ciclo límite para $a_1a_3 > 0$. Note que la ecuación (3.1) está en este caso.

Si el grado del polinomio F es igual a 5, $m = 5$, es el máximo número de ciclo límites que puede tener la ecuación (3.7) es dos.

Desde los años 50 se vienen estudiando ecuaciones acopladas de la ecuación modificada de Van der Pol para el estudio de la conducción eléctrica del corazón con la finalidad de localizar los bloqueos cardiacos. Estas ecuaciones necesitan una elección adecuada de los coeficientes de acoplamiento para la sincronización de los osciladores y evitar usar factor de retardo de tiempo.

Para estos modelos acoplados de ecuaciones es más difícil estudiar teóricamente dichos sistemas, por tal motivo los investigadores buscan una forma más sencilla de las ecuaciones que puedan modelar el comportamiento cardiaco.

En tal sentido (Grudziński y Żebrowski, 2004) motivados por el estudio realizado por (Postnov, Han y Kook, 1999), quien estudia una ecuación modificada de Van der Pol, plantea dos ecuaciones de la forma:

$$\ddot{x} + \alpha\left(x^2 - v^2\right)\dot{x} + \frac{x\left(x+d\right)\left(x+e\right)}{ed} = 0 \tag{3.8}$$

donde $\alpha,\ v,\ d,\ e$ son parámetros de control, claro está que $ed \neq 0$.

$$\ddot{x} + \alpha\left(x - v_1\right)\left(x - v_2\right)\dot{x} + \frac{x\left(x+d\right)\left(x+e\right)}{ed} = 0 \tag{3.9}$$

en donde α, v, d, e y f son constantes positivas y $v_1 v_2 < 0$.

En la busqueda de una forma de ecuaciones más simples en el estudio del comportamiento de las membranas neuronales (Postnov, Han y Kook, 1999) presenta una ecuación de tipo Van der Pol

$$\ddot{x} + \alpha\left(x^2 - v\right)\dot{x} + \frac{x\left(x+d\right)\left(x+2d\right)}{d^2} = 0 \tag{3.10}$$

que al realizar un estudio de dicha ecuación observa que puede representar de una buena forma el comportamiento de las membranas neuronales. Además revisando la literatura de las ecuaciones de tipo Van der Pol se puede verificar que es el primer autor que a la ecuación (3.10) le llama Ecuación Modificada de Van der Pol.

(Postnov, Han y Kook, 1999) además observa la posible existencia de un ciclo límite para ciertos valores del parámetro. Se puede observar que la ecuación (3.10) tiene 3 puntos críticos, en $x_1 = 0$, $x_2 = -d$ y $x_3 = -2d$, donde $x_1 = 0$ es inestable, $x_2 = -d$ es inestable, particularmente un punto silla, $x_3 = -2d$ tiene un nodo estable.

Las ecuaciones de orden dos de tipo Van der Pol estudiados hasta el 2004 han proporcionado resultados interesantes no solo desde el punto de vista de teoría matemática sino también Física y Biomatemática, pero no han podido reproducir alguna caracteristica importante de los potenciales de acción cardiacos (Grudziński y Żebrowski, 2004) y (Jawarneh y Staffeldt, 2019).

La ecuación (3.7) propuesta por Zebrowsk es un modelo fisiológicamente más exacto y por lo tanto, se puede usar como base para más investigaciones de la dinámica de los latidos del corazón (Jawarneh y Staffeldt, 2019).

(Acosta, Gallo, García y Peluffo-Ordóñez, 2022) motivado por el estudio realizado por (Grudziński y Żebrowski, 2004) que estudian la ecuación modificada de Van der Pol (3.8), produce un modelo que estudia la acción del corazón donde aparecen la región de las órbitas periódicas y exhibe una región positivamente invariante la cual fue encontrada por simulaciones numéricas, que capturan orbitas periódicas por una región positivamente invariante limitada por curvas cerradas.

Recientemente, (Cardarilli et al., 2019) exhibe un sistema de 4 ecuaciones modificadas de Van der Pol acopladas para el estudio de un modelo eléctrico del sistema cardiaco, para la simulación de arritmos y los bloqueos de los impulsos eléctricos para hacer latir el corazón.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 \\
\dot{y}_1 &= -\alpha_1 y_1 \left(x_1 - u_{11}\right)\left(x_1 - u_{12}\right) - f_1 x_1 \left(x_1 + d_1\right)\left(x_1 + e_1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= -\alpha_2 y_2 \left(x_2 - u_{21}\right)\left(x_1 - u_{22}\right) - f_2 x_2 \left(x_2 + d_2\right)\left(x_2 + e_2\right) + K_{SA-AV}\left(x_1 - x_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{3_{RB}} &= y_{3_{RB}} \\
\dot{y}_{3_{RB}} &= -\alpha_3 y_{3_{RB}} \left(x_{3_{RB}} - u_{31}\right)\left(x_{3_{RB}} - u_{32}\right) - f_3 x_{3_{RB}} \left(x_{3_{RB}} + d_3\right)\left(x_{3_{RB}} + e_3\right) + K_{AV-RB}\left(x_2 - x_{3_{RB}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{3_{LB}} &= y_{3_{LB}} \\
\dot{y}_{3_{LB}} &= -\alpha_3 y_{3_{LB}} \left(x_{3_{LB}} - u_{31}\right)\left(x_{3_{LB}} - u_{32}\right) - f_3 x_{3_{LB}} \left(x_{3_{LB}} + d_3\right)\left(x_{3_{LB}} + e_3\right) + K_{AV-LB}\left(x_2 - x_{3_{LB}}\right)
\end{aligned}$$

4. CONCLUSIÓN

Balthazar Van der Pol realizó investigaciones que se centraron, en principio, en ecuaciones diferenciales no lineales asociadas a teoría de circuitos eléctricos. Al poco tiempo, en colaboración con su colega Van der Mark, quedó establecido que la hoy denominada ecuación clásica de Van der Pol, o simplemente ecuación de Van der Pol, constituyó una de las primeras ecuaciones que correspondían a modelar el fenómeno generado cuando un marcapasos impulsa a un corazón. Desde entonces muchos matemáticos y científicos de otras ciencias, han mostrado gran interés en el estudio de la ecuación de Van der Pol.

La revisión bibliográfica presentada en este trabajo nos muestra la evolución de la ecuación de Van der Pol, en el sentido de diversas modificaciones, asociada a problemas que modelan el comportamiento de ritmos cardiacos. Así, en el recorrido dado desde los años 20, del siglo pasado, hasta el presente se han resaltado distintos trabajos que muestran estudios sobre existencia de ciclos límites y órbitas periódicas, estabilidad de soluciones y otros aspectos. Se puede observar que la mayoría de estos estudios, desde los años 80, del siglo pasado, van acompañados, en el caso de problemas de aplicaciones, por simulaciones numéricas.

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

6. REFERENCIAS

Acosta, A., Gallo, R., García, P., y Peluffo-Ordóñez, D. (2022). Positive invariant regions for a modified Van Der Pol equation modeling heart action. *Applied Mathematics and Computation*, *442*, 127732.

A.P. Kuznetsov and N.V. Stankevich and L.V. Turukina. (2009). Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *238*(14), 1203-1215. https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.04.001

Cardarilli, G. C., Nunzio, L. D., Fazzolari, R., Re, M., y Silvestri, F. (2019). Improvement of the Cardiac Oscillator Based Model for the Simulation of Bundle Branch Blocks. *Applied Sciences*, *9*(18), 3653. https://doi.org/10.3390/app9183653

Cartwright, M. L., y Littlewood, J. E. (1945). On Non-Linear Differential Equations of the Second Order: I. the Equation y¨ - k (1-y 2)y· y = b k cos(l), k Large. *Journal of the London Mathematical Society*, *s1-20*(3), 180-189. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-20.3.180

Dixit, S., Sharma, A., y Shrimali, M. D. (2019). The dynamics of two coupled Van der Pol oscillators with attractive and repulsive coupling. *Physics Letters A*, *383*(32), 125930. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.125930

FitzHugh, R. (1961). Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, *1*(6), 445-466. https://doi.org/10.1016/s0006-3495(61)86902-6

Giacomini, H., y Neukirch, S. (1997). Number of limit cycles of the Liénard equation. *Physical Review E*, *56*(4), 3809-3813. https://doi.org/10.1103/physreve.56.3809

Ginoux, J.-M. (2017). *History of Nonlinear Oscillations Theory in France (1880-1940)*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55239-2

Ginoux, J.-M., y Letellier, C. (2012). Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *22*(2), 023120. https://doi.org/10.1063/1.3670008

Grant, R. P. (1956). The mechanism of A-V arrhythmias. *The American Journal of Medicine*, *20*(3), 334-344. https://doi.org/10.1016/0002-9343(56)90118-8

Grudziński, K., y Żebrowski, J. J. (2004). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *336*(1-2), 153-162. https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020

Jawarneh, I., y Staffeldt, R. (2019). CONLEY INDEX METHODS DETECTING BIFURCATIONS IN AMODIFIED VAN DER POL OSCILLATOR APPEARING IN HEARTACTION MODELS. https://www.researchgate.net/publication/330775277

J.J.O'Connor y E.F.Robertson. (2008). Balthasar van der Pol. *School of Mathematics and Statistics-University of St Andrews, Scotland*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_der_Pol/

Katholi, C., Urthaler, F., Macy, J., y James, T. (1977). A mathematical model of automaticity in the sinus node and AV junction based on weakly coupled relaxation oscillators. *Computers and Biomedical Research*, *10*(6), 529-543. https://doi.org/10.1016/0010-4809(77)90011-8

Levinson, N. (1949). A Second Order Differential Equation with Singular Solutions. *The Annals of Mathematics*, *50*(1), 127. https://doi.org/10.2307/1969357

Levinson, N., y Smith, O. K. (1942). A general equation for relaxation oscillations. *Duke Mathematical Journal*, *9*(2). https://doi.org/10.1215/s0012-7094-42-00928-1

Low, L. A., Reinhall, P. G., Storti, D. W., y Goldman, E. B. (2006). Coupled van der Pol oscillators as a simplified model for generation of neural patterns for jellyfish locomotion. *Structural Control and Health Monitoring*, *13*(1), 417-429. https://doi.org/10.1002/stc.133

Martín, S. G., y Lafuente, V. (2017). *Referencias bibliográficas: indicadores para su evaluación en trabajos científicos* (Vol. 31). Universidad Nacional Autonoma de Mexico. https://doi.org/10.22201/iibi.0187358xp.2017.71.57814

Postnov, D., Han, S. K., y Kook, H. (1999). Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation. *Physical Review E*, *60*(3), 2799-2807. https://doi.org/10.1103/physreve.60.2799

Ryzhii, E., y Ryzhii, M. (2014). Modeling of Heartbeat Dynamics with a System of Coupled Nonlinear Oscillators. En *Communications in Computer and Information Science* (pp. 67-75). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54121-6_6

Suarez, C., Mesahuanca, C., Hernandez, F., y Felipe Tolentino, W. (2020). El Oscilador de Van Der Pol.

van der Pol, B. [B.]. (1934). The Nonlinear Theory of Electric Oscillations. *Proceedings of the IRE*, *22*(9), 1051-1086. https://doi.org/10.1109/jrproc.1934.226781

van der Pol, B. [Balth.]. (1926). LXXXVIII.On "relaxation-oscillations". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *2*(11), 978-992. https://doi.org/10.1080/14786442608564127

van der Pol, B. [Balth], y Bremmer, H. (1937). LXXVI. The diffraction of electromagnetic waves from an electrical point source round a finitely conducting sphere, with applications to radiotelegraphy and the theory of the rainbow.—Part II. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *24*(164), 825-864. https://doi.org/10.1080/14786443708565149

van der Pol, B. [Balth.], y van der Mark, J. (1928). LXXII.The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *6*(38), 763-775. https://doi.org/10.1080/14786441108564652

West, B. J., Goldberger, A. L., Rovner, G., y Bhargava, V. (1985). Nonlinear dynamics of the heartbeat. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *17*(2), 198-206. https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90004-1

Zduniak, B., Bodnar, M., y Foryś, U. (2014). A modified van der Pol equation with delay in a description of the heart action. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, *24*(4), 853-863. https://doi.org/10.2478/amcs-2014-0063

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Winter Mendoza	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo.
Antonio Acosta	Concepción, análisis y criterio.
Luis Ruiz	Revisión, búsqueda bibliográfica y redacción.