UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 338 -353). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4924

ESTIMACIONES DEL OPERADOR MAXIMAL ASOCIADO A MEDIDAS NO DOBLANTES

Yoconda Magdalena Chávez Macías[1], Adrián Ramón Infante Linares[2]

[1] Instituto de Posgrado. Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Técnica de Manabí. Ecuador. Correo electrónico: yoquitochavez@gmail.com

[2] Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Técnica de Manabí. Ecuador. Correo electrónico: ainfante@usb.ve

*Autor para la correspondencia: yoquitochavez@gmail.com

Recibido: 29-07-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza

Ciencias Matemáticas

RESUMEN

Este artículo estudia la propiedad de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado M_{μ}, asociado a diferentes tipos de medidas μ. Una medidas μ es doblante si existen constantes c, C tales que $\mu\big(B(x,r)\big)c \leq \mu\big(B(x.3r)\big) \leq C\mu(B(x,r))$, con $B(x,r)$ es la bola de de centro x y radio $r > 0$, el operador maximal asociado a una medida doblante es acotado de tipo (1,1). Cuando la medida no es doblante el operador maximal no es necesariamente acotado, por ejemplo el operador maximal asociado a la medida gaussiana, $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$, no es acotado. Damos una extensión del resultado de la acotación del operador maximal definidos sobre todos los cubos de $\mathbb{R}^2$ y asociado a una clase de medidas absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, demostrando que el resultado de acotación también se cumple en dimensión mayor y demostramos una desigualdad en cuasi-norma para este caso.

Palabras clave: Estimaciones, operador maximal, medida radial y monótona.

ON ESTIMATES OF THE MAXIMAL OPERATOR ASSOCIATED TO NONDOUBLING MEASURE

ABSTRACT

This paper we study the boundedness property of the noncentered Hardy-Littlewood maximal operator M_{μ}, associated with different types of measures μ. A measure μ is doubling if there exist constants c, C such that $\mu\big(B(x,r)\big)c \leq \mu\big(B(x.3r)\big) \leq C\mu(B(x,r))$, with $B(x,r)$ is the ball of center x and radius $r > 0$, the maximal operator associated to a doubling measure is bounded of type (1,1). When the measure is not doubling the maximal operator is not necessarily bounded, for example the maximal operator associated to the Gaussian measure, $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$, is not bounded. We give an extension of the bounding result of the maximal operator defined on all cubes of $\mathbb{R}^2$ and associated to a class of absolutely continuous measures with respect to the Lebesgue measure, showing that the bounding result also holds in higher dimension and we prove a quasi-norm inequality for this case.

Keys word: estimates, maximal operator, radial and monotonic measure.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

ESTIMATIVAS DO OPERADOR MÁXIMO ASSOCIADO ÀS MEDIDAS DE NÃO DUPLICAÇÃO

RESUMO

Neste artigo estudamos a propriedade de limite do operador máximo não centrado Hardy-Littlewood M_μ, associado a diferentes tipos de medidas μ. Uma medida μ está a duplicar se existirem constantes c,C tais que $\mu\big(B(x,r)\big)c \leq \mu\big(B(x.3r)\big) \leq C\mu(B(x,r))$, com $B(x,r)$ é a bola de centro x e raio $r > 0$, o operador máximo associado a uma medida de duplicação é delimitado do tipo (1,1). Quando a medida não é duplicada, o operador máximo não é necessariamente limitado, por exemplo, o operador máximo associado à medida gaussiana, $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$, não é limitado. Damos uma extensão do resultado limite do operador máximo definido em todos os cubos de $\mathbb{R}^2$ e associado a uma classe de medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, mostrando que o resultado limite também se mantém em dimensão superior e provamos uma desigualdade quase nula para este caso.

Palavras chave: estimativas, operador máximo, medida radial e monotónica

Citación sugerida: Chávez, Y., Infante, A. (2022). ESTIMACIONES DEL OPERADOR MAXIMAL ASOCIADO A MEDIDAS NO DOBLANTES. Revista Bases de la Ciencia, 7 (No Especial), Diciembre, 2022, 338-353. DOI: **https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4924**

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los grandes logros del análisis armónico en el pasado siglo fue la introducción de la función maximal de Hardy-Littlewood que permitió esclarecer determinados fenómenos de convergencia, entre ellos el Teorema de diferenciación de Lebesgue. Su importancia fue aún más relevante con el desarrollo de la teoría de integrales singulares de Calderón y Zygmund (Pérez & Trujillo-Gonzales, 2001), puesto que aquel operador controla en cierta forma las singularidades de éstas. Desde entonces ha habido un notable interés en conocer en qué otras formas y contextos es posible definir este operador maximal manteniendo sus propiedades de regularidad y acotación (Ghosh & Mohanty, 2022), por ejemplo sustituyendo las bolas euclídeas por otros cuerpos geométricos o cambiando la medida subyacente de Lebesgue por otras medidas anisotrópicas.

El objetivo del presente trabajo es el estudio del problema: Determinar condiciones bajo las cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a una medida de Borel μ, es un operador acotado sobre el espacio de Lebesgue $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ o en algún espacio de Orlicz.

Si la medida asociada es doblante las propiedades de acotación del correspondiente operador con respecto a unas u otras figuras son las mismas. No ocurre lo mismo cuando la medida no es doblante y es aquí cuando la geometría asociada a los cubos resulta crucial. Así como lo demuestran Infante & Soria, (2012) que existe una diferencia sustancial para la clase de medidas consideradas por P. Sjögren y F. Soria en (Sjögren & Soria, 2004), cuando se reemplaza las bolas por cubos, en términos del exponente de integrabilidad óptimo del operador maximal asociado. Cuando la medida es la Gaussiana, esta diferencia se aprecia incluso entre el caso de cubos con lados paralelos a los ejes y el de cubos rotados en general (Bourgain, 2014). Sea μ una medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}^n$. Asociada a esta medida, definimos el operador maximal no centrado definido sobre cubos rotados por

$$M^2_\mu f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|\ d\mu(y),$$

el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x tales que $\mu(Q) > 0$. Demostramos que es un operador acotado para una familia amplia de medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. Este problema se encuentra en (Infante & Soria, 2012) donde obtienen la desigualdad modular en el caso de $\mathbb{R}^2$. En este artículo vamos a extender el resultado a $\mathbb{R}^n$ para todo n y además se probará que el exponente que se obtiene en la desigualdad modular es óptimo. Presentaremos una desigualdad en cuasi norma que permite complementar el resultado.

Un caso particular es el operador maximal definido sobre rectángulos paralelos a los ejes que es reminiscente del Teorema de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund (ver (de Gusman, 1975.) y (Zygmund, 1968)) sobre la acotación del operador maximal fuerte.

Sería interesante conocer el comportamiento, en este caso, de las medidas de tipo $e^{-|x|^{\delta}}\,dx$ para $\delta \neq 2$. Como veremos en este trabajo, la desigualdad para estas medidas es al menos válida en $\mathbb{R}^n$ con exponente n. En este artículo demostramos la desigualdad modular para el operador maximal definido con cubos (rotados) de $\mathbb{R}^n$ y asociado a una famila de medida radial y decreciente. Utilizamos la misma técnica que fue introducida en (Sjögren & Soria, 2004). Como la medida es decreciente algunos de los lemas empleados se encuentran en (Sjögren & Soria, 2004), pero con ciertas variaciones, reproducimos las pruebas con la intención de que este trabajo sea autocontenido.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Determinar condiciones bajo las cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a una medida de Borel μ, es un operador acotado sobre el espacio de Lebesgue $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ o en algún espacio de Orlicz.

Si la medida asociada es doblante, es decir que existen constantes c, C tales que $\mu\big(B(x,r)\big)c \leq \mu\big(B(x.2r)\big) \leq C\mu(B(x,r))$, con $B(x,r)$ es la bola de de centro x y radio $r > 0$, entonces las propiedades de acotación del correspondiente operador con respecto a unas u otras figuras son las mismas. No ocurre lo mismo cuando la medida no es doblante y es aquí cuando la geometría asociada a los cubos resulta crucial. Así como lo demuestran Infante & Soria, (2012) que existe una diferencia sustancial para la clase de medidas consideradas por P. Sjögren y F. Soria en (Sjögren & Soria, 2004), cuando se reemplaza las bolas por cubos, en términos del exponente de integrabilidad óptimo del operador maximal asociado. Cuando la medida es la Gaussiana, esta diferencia se aprecia incluso entre el caso de cubos con lados paralelos a los ejes y el de cubos rotados en general (Bourgain, 2014). Sea μ una medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}^n$. Asociada a esta medida, se define el operador maximal no centrado definido sobre cubos rotados por

$$M^2_{\mu} f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|\, d\mu(y),$$

el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x tales que $\mu(Q) > 0$. Se demostró que $M^2_\mu f$ es un operador acotado para una familia amplia de medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. Este problema se encuentra en Infante & Soria (2012) donde obtienen la desigualdad modular en el caso de $\mathbb{R}^2$.

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Un caso particular es el operador maximal definido sobre rectángulos paralelos a los ejes que es reminiscente del Teorema de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund, ver de Gusman (1975.) y Zygmund (1968) sobre la acotación del operador maximal fuerte.

CONTRAEJEMPLO: EL EXPONENTE n DE LA DESIGUALDAD MODULAR ES ÓPTIMO

En este apartado probaremos que el exponente que aparece en la desigualdad modular, en el caso Gaussiano, es óptimo.

Teorema 3.1. *Sea* $M_{\mu_2}^2$ *el operador maximal asociado a la medida Gaussiana,* $d\mu_2(x) = e^{-|x|^2}\,dx$, *y definido sobre cubos de* $\mathbb{R}^n$. *Sea* $\Phi(u)$ *una función creciente con* $\Phi(0) = 0$ *y tal que* $\Phi(u) = uG(u)$, *donde* G *verifica que*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{G(u)}{(\log^+ u)^n} = 0.$$

Entonces dada cualquier constante $C > 0$, *siempre es posible hallar una función* f *y un escalar* $\lambda > 0$ *tal que*

$$\mu_2\{x : M_{\mu_2} f(x) > \lambda\} > C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu_2.$$

Demostración. Sea $R > 0$, un número cuyo valor daremos más adelante. Denotemos por B^* a la bola de centro $(R, 0, \ldots, 0)$ y radio $\phi(R)$. Definimos la función f por

$$f(x) = \frac{\chi_{B^*}(x)}{\mu_2(B^*)},$$

donde $\chi_{B^*}(x)$ es 1 si $x \in B^*$ y 0 en otros casos.

Dado $\epsilon >$ 0, sea Q_0 un cubo tal que el punto $P_0 = (R_0, 0, \ldots, 0)$ es uno de sus vértices y es su punto más cerca del origen, con $R_0 = R - l_0 \cos\theta$, $l_0 = \epsilon\phi(R)\log R$ y la recta que pasa por el origen y por el punto P_0 es un eje de simetría para el cubo Q_0.

Obsérvese que $\phi(R) \ll l_0 \ll R$ y $R \sim R_0$.

Para $q > R_0$, definimos a $\psi_0(q) = q$ y si $j \geq 1$ con una fórmula recursiva, $\psi_j(q) = \psi_{j-1}(q) + \phi(\psi_{j-1}(q))$, siempre que $\psi_j(q) > q_0$. Cumple que

$$\gamma_0\left(\psi_{j+1}(q)\right) = \frac{1}{2^{j+1}}\gamma_0(q).$$

Para $j = 0,1,\dots,k$, sea $R_j = \psi_j\,(R_0)$, donde k es dado por

$$\psi_k(R_0) < R_0 + \frac{l_0 cos\theta}{2} < \psi_{k+1}(R_0).$$

De la desigualdad anterior se deduce

$$\psi_k(R_0) - R_0 \geq \frac{l_0 cos\theta}{2} \leq \psi_{k+1}(R_0) - R_0.$$

Utilizando la definición de $\psi_k(R_0)$, sabemos que $\psi_k(R_0) = R_0 + \sum_{j=0}^{k-1}\phi\left(R_j\right) \sim R_0 + k\varphi(R_0)$, la última equivalencia es debido a que $R_j \sim R_0$ implica $\phi(R_j) \sim \frac{1}{R}$.

Tenemos

$$\frac{l_0}{2} \sim k\varphi(R),$$

es decir, $k \sim \frac{l_0}{\varphi(R)} = \epsilon\, log\, R$.

Denotemos por $Q_j,\ j = 0,1,\dots,k$, el cubo cuyo punto más cerca al origen es un vértice de la forma $\Delta_j = (R_j\,, R_j\,,\dots, R_j\,)$ cuya arista mide l_j viene dado por

$$l_j = \left(2^{\frac{2}{n-1}}\right)^j l_0.$$

Sea $\lambda = min\left\{\frac{1}{\mu_2(Q_j)} :\ j = 0,1,\dots,k\right\}$. Como $B^* \subset Q_j$, para todo j, tenemos

$$\frac{1}{\mu_2(Qj)}\int_{Q_j}|f(y)|\ d\mu_2(y) = \frac{1}{\mu_2(Q_j)} \geq \lambda$$

Para cada $j = 1,2,\dots,k$, denotamos por T_j al mayor número que verifica

$$S_j = \left\{t\omega \in \mathbb{R}\times S^{n-1} : \frac{R + R_j}{2} < t < R_j, |\omega - (1,0,\dots,0) < T_j| \subset \bigcup_\alpha Q_j^\alpha\right\}$$

donde Q_j^α forman la familia de cubos simétrico con respecto a una recta que pase por el origen y por uno de sus vértices, contienen a la bola B^* y cada Q_j^α tiene la misma distancia al origen que el cubo Q_j.

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Se deduce que

$$\mu_2(S_j) \geq C\gamma_0(R_j)\varphi(R_j)R_j^{n-1}\left(\frac{R - R_j}{R}\right)^{n-1}.$$

Para la unión, se verifica

$$\mu_2\left(\bigcup_{j=0}^{k} S_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mu_2(S_j - S_{j-1}) + \mu_2(S_0) \sim \sum_{j=1}^{k} \mu_2(S_j),$$

y $\bigcup_{j=0}^{k} S_j \subset \{x : M_{\mu_2}^2 f(x) \geq \lambda\}$. Así obtenemos

$$\mu_2\{x : M_{\mu_2}^2 f(x) \geq \lambda\} \geq c\sum_{j=0}^{k} \gamma_0(R_j)\left(\varphi(R_j)\right)^n \left(\frac{R - R_j}{\varphi(R_j)}\right)^{n-1}$$

$$\sim \sum_{j=0}^{k} \gamma_0(R_j)\left(\varphi(R_j)\right)^n \left(\frac{l_0}{\varphi(R)}\right)^{n-1} \sim \sum_{j=0}^{k} \mu_2(\Delta_j)(log\ R)^{n-1}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}k(log\ R)^{n-1} \geq c\frac{1}{\lambda}(log\ R)^n.$$

Como

$$\int \Phi\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) d\mu_2 = \frac{1}{\lambda} G\left(\frac{\mu_2(Q_k)}{\mu_2(Q^*)}\right),$$

sólo es necesario demostrar que, para R suficientemente grande, se verifica

$$C\frac{1}{\lambda}G\left(\frac{\mu_2(Q_k)}{\mu_2(Q^*)}\right) < \frac{1}{\lambda(log\ R)^n}.$$

Obsérvese que

$$u(R) \equiv \frac{1}{\lambda\mu_2(Q^*)} \sim \frac{\mu_2(Q_k)}{\mu_2(Q^*)} \sim \frac{\gamma_0(R_k)\left(\varphi(R_k)\right)^n}{\gamma_0(R)\left(\varphi(R)\right)^n} \sim e^{R^2 - R_k^2},$$

y que

$$\log u(R) \sim (R^2 - R_k^2) \sim R(R - R_0) \sim \frac{l_0}{\varphi(R)} \sim \log R.$$

La conclusión sigue de la hipótesis sobre G, como $\lim_{R\to\infty} u(R) = \infty$, obtenemos

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

$$\lim_{R\to\infty} G\left(\frac{1}{\lambda\mu_2(B^*)}\right)(\log R)^{-n} \leq C \lim_{R\to\infty} G\ \left(u(R)\right)(\log u(R)\ )^{-n} = 0$$

Esto termina la prueba. ■

DESIGUALDAD EN CUASINORMA

Sea $d\mu(x) = d\mu_\delta(x) = e^{-x^\delta}dx$, en esta sección veremos que el operador satisface una desigualdad en cuasinorma, con un exponente mejor que en el caso de la desigualdad modular:

$$\mu_\delta\left\{x\ \in \mathbb{R}^n\colon M_{\mu_\delta}f(x) > \lambda\right\} \leq\ C\frac{(\log^+\lambda\ )^{n-1}}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,d\mu_\delta + \frac{C}{\lambda},\quad \lambda\ >\ 0,$$

obtenemos que M_{μ_δ} manda $L(\log L)^{n-1}_{\mu_\delta}\ (\mathbb{R}^n)$ sobre $L^{1,\infty}_{\mu_\delta}\ (\mathbb{R}^n)$. Es decir, que existe una constante C tal que, si $\lambda\ >\ 0$,

$$\text{(4.1)}\qquad \mu_\delta\left\{x\ \in \mathbb{R}^n\colon M_{\mu_\delta}f(x) > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n}|f|(1+\log^+|f|\ )^{n-1}d\mu_\delta\right)$$

El argumento utilizado en (Sjögren & Soria, 2004) no es válido en nuestro caso por encontrarnos en el límite de integrabilidad sobre la esfera $S^{n\,-\,1}$. En su lugar, en esta sección vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.1. Si $n\ \geq\ 2$ y $\delta\ >\ 0$, entonces M_{μ_δ} satisface la desigualdad

$$\text{(4.2)}\qquad \mu_\delta\left\{x\ \in\ \mathbb{R}^n\colon\ M_{\mu_\delta}f(x)\ >\ \lambda\right\} \leq C\ \frac{(\log^+\lambda\ )^{n-1}}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\log|f|\ d\mu_\delta + \frac{C}{\lambda}\ ,\quad \lambda\ >\ 0.$$

Demostración. Para demostrar el Teorema 4.1, solo es necesario estudiar el operador asociado a la clase

$$\Gamma^* = \{\Gamma_{q,\theta}\ \colon\ q\ >\ q_0\}\,,$$

ya que fuera de este conjunto el operador maximal es de tipo débil (1,1) (ver Teorema 2.1).

Consideremos el operador

$$\widetilde{M}_{\mu_\delta}\,f(x) = \sup_{\substack{q<\rho\\ 0<\theta}}\frac{1}{\mu(A_q)}\int_q^\infty\left(\frac{1}{\theta^{n-1}}\int_{|x'-\omega|<\theta}|f(t\omega)|d\sigma(\omega)\right)d\mu_0(t),$$

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

donde $x = \rho x' \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$. De manera que $\widetilde{M}_{\mu_\delta}$ es acotado por la composición de dos operadores, uno actuando sobre la variable angular y el segundo actuando en la variable radial, ambos de tipo débil (1,1). Tenemos, por tanto que $\widetilde{M}_{\mu_\delta}$ satisface la desigualdad $L \log L$ de la *ecuación 4.1*.

Si $\Gamma_{q,\theta} \in \Gamma^*$ sabemos de $(Teorema$ 4.1)

$$\mu(\Gamma_{Q,\theta}) \geq C\gamma_0(q)\varphi(q)(\varphi(q)\operatorname{sen}\theta)^{n-1},$$

y $\mu(A_q) \sim \gamma_0(q)q^{n-1}\varphi(q)$ (ver Teorema 2.1). Además, si $t\omega, \rho x' \in \Gamma_{q,\theta}$, con $t, \rho \in R_+$, $\omega, x' \in S^{n-1}$, entonces

$$|x' - \omega| < \theta \sim \operatorname{sen}\theta.$$

Por tanto, si $x = \rho x' \in \Gamma_{q,\theta}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu\left(\Gamma_{q,\theta}\right)} \int_{\Gamma_{q,\theta}} |f|\, d\mu &\leq \frac{1}{\mu\left(\Gamma_{q,\theta}\right)} \int_q^\infty \int_{S^{n-1}} \chi_{\Gamma_{q,\theta}}(t\omega)|f(t\omega)|d\sigma(\omega)d\mu_0(t) \\
&\leq \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^\infty \left(\frac{\mu(A_q)}{\mu\left(\Gamma_{q,\theta}\right)}\right) \int_{|x'-\omega|<\theta} |f(t\omega)|d\sigma(\omega)d\mu_0(t) \\
&\leq C\left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{n-1} \widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x) = C\left(\tilde{\tau}(q)\right)^{n-1}\widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x) \\
&\leq C\left(\tilde{\tau}(|x|)\right)^{n-1}\widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x)
\end{aligned}$$

Donde $\tilde{\tau}(q) = 1/\tau(q)$, que es una función creciente. Así que

$$M_{\mu_\delta} f(x) = \sup_{x \in \Gamma_{q,\theta} \in \Gamma^*} \frac{1}{\mu(\Gamma_{q,\theta})} \int_{\Gamma_{q,\theta}} |f| d\mu_\delta \leq \left(\tilde{\tau}(|x|)\right)^{n-1} \widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x). \tag{4.3}$$

Como la medida es $d\mu_\delta = e^{-|x|^\delta}dx$, sabemos que $\varphi(q) \sim q^{1-\delta}$ y $\tilde{\tau}(q) \sim q^\delta$.

sea $\Phi(u) = \Phi_{n-1}(u) = u(1 + \log^+ u)^{n-1}$, $u > 0$ y $\psi(v) = e^{v^{\frac{1}{n-1}}}$. Utilizando la desigualdad de Young, $uv \leq C(\Phi(u) + \Psi(v))$, en el lado derecho de (ver 4.3), obtenemos

$$M_{\mu_\delta} f(x) \leq C\Phi\left(\widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x)\right) + Ce^{\frac{|x|^\delta}{2}}.$$

Tenemos entonces

$$\mu_\delta\{x : M_{\mu_\delta} f(x) > \lambda\} \leq \mu_\delta\left(\left\{x : \widetilde{M}_{\mu_\delta} f(x) > \Phi^{-1}\left(\frac{\lambda}{2C}\right)\right\}\right) + \frac{C}{\lambda}.$$

Usando que $\Phi^{-1}(\lambda) \sim \frac{\lambda}{(log\,\lambda)^{n-1}}$ para $\lambda \gg 1$, obtenemos

$$\mu_\delta \left\{x : M_{\mu_\delta} f(x) > \lambda \right\} \leq C \frac{(\log^+ \lambda)^{n-1}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \log|f| \, d\mu_\delta + \frac{C}{\lambda}.$$

■

SOBRE EL MEJOR EXPONENTE PARA LA DESIGUALDAD EN CUASINORMA

En este apartado probaremos que para las medidas de tipo Gaussiano $e^{-|x|^\delta} dx$, $\delta > 0$, la desigualdad en cuasinorma (ver 4.1) no puede ser mejorada.

Teorema 5.1. Dado $\delta > 0$ fijo, definimos $d\mu_\delta(x) = e^{-|x|^\delta} dx$. Sea $\Phi(u)$ una función creciente tal que $\Phi(0) = 0$ y en otros casos $\Phi(u) = uG(u)$ donde G verifica

$$\lim_{u \to \infty} \frac{G(u)}{(\log^+ u)^{n-1}} = 0.$$

Entonces para toda constante $C > 0$, existe una función f y un número $\lambda > 0$ tal que

$$\mu_\delta \left\{x : M^3_{\mu_\delta} f(x) > \lambda \right\} > \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f|) d\mu_\delta + 1 \right).$$

Demostración. Sea $R > 0$ un número grande y consideremos

$$f_R(x) = \frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})} \chi_{A_{2R}}(x).$$

Para $|x| \geq R$ denotemos por $\Gamma_R(x)$ un cono regular exterior conteniendo a x y tal que $dist(\Gamma_{R,\theta}(0), 0) = R$. $Si\ \theta = \frac{\pi}{4}$ $y\ x = (R, 0, \dots, 0)$ lo denotaremos simplemente por Γ_R. Tenemos para $|x| \geq R$

$$M_{\mu_\delta} f(x) \geq \frac{1}{\mu_\delta(\Gamma_{R,\theta}(x))} \int_{\Gamma_{R,\theta}(x)} |f_R(y)| d\mu_\delta(y) = \frac{1}{\mu_\delta(\Gamma_R)} \int_{\Gamma_R} |f_R(y)| d\mu_\delta(y) \equiv \lambda_R.$$

Por tanto, $\mu_\delta \left\{x : M_{\mu_\delta} f_R(x) \geq \lambda_R \right\} \geq \mu_\delta(A_R)$. Es claro que $\lambda_R \sim \frac{1}{\mu_\delta(\Gamma_R)}$. Por otra parte, como

$$\frac{1}{\lambda_R} \left(\int \Phi(f_R) d\mu_\delta \right) \sim \mu_\delta(\Gamma_R) \Phi \left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})} \right) \mu_\delta(A_{2R}) = \mu_\delta(\Gamma_R) G \left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})} \right),$$

es suficiente demostrar que

$$\mu_\delta(A_R) \geq C_{\mu_\delta}(\Gamma_R) G\left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right) ,$$

para R suficientemente grande. La medida del cono Γ_R es

$$\mu_\delta(\Gamma_R) \sim \gamma_0(R)\left(\frac{R\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\varphi(R) + R^2\cos^2\frac{\pi}{4}}}\right)^{n-1} (\varphi(R))^n \sim \gamma_0(R)R^{n-1}\varphi(R)\tau(R)^{n-1}$$
$$\sim \mu_\delta(A_R)\tau(R)^{n-1} .$$

Así que es suficiente con demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} G\left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right)\tau(R)^{n-1} = 0.$$

Como

$$\left(log\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right)^{n-1} \sim \left(log\frac{1}{\gamma_0(2R)}\right)^{n-1} \sim R^{\delta(n-1)} \sim \left(\frac{1}{\tau(R)}\right)^{n-1},$$

la prueba termina observando que

$$\lim_{R\to\infty} G\left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right)\tau(R)^{n-1} \leq C\lim_{R\to\infty} G\left(\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right)\left(log\frac{1}{\mu_\delta(A_{2R})}\right)^{-(n-1)} = 0.$$

■

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Definición 2.1. Sea μ una medida positiva de Borel sobre $\mathbb{R}^n$. Asociada a la medida μ, definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood sobre cubos como

$$M_\mu^2 f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y)| \, d\mu(y),$$

donde el supremo es tomado sobre los cubos Q de medida positiva, $\mu(Q) > 0$, que contiene al punto x.

Los cubos Q, considerados en la definición anterior, pueden ser rotados con respectos a los ejes de coordenadas.

En este trabajo vamos a extender a dimensión superior la estimación de tipo débil para el operador M_μ^2, como veremos es un simple argumento geométrico, y probaremos que el exponente que aparece en la desigualdad es óptimo, También presentaremos la desigualdad en cuasi-norma para este operador. Así que, las medidas que consideraremos en este trabajo son una familia de medidas decrecientes, absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue y que en general no son medidas doblantes pero que controlamos, en cierto sentido, como degenera esta propiedad.

Definición 2.2. Diremos que μ es una medida decreciente, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, si existe una función radial $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ tal que

$$d\mu(x) = \gamma(x)dx,$$

es decir, que existe una función $\gamma_0\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, decreciente (estrictamente), continua y tal que $\gamma(x) = \gamma_0(|x|)$.

Supongamos que $\gamma_0(0^+) < \infty$ y $\lim_{t\to\infty} \gamma_0(t) = 0$. Definimos la función $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, con la que estudiaremos como degenera la propiedad doblante de γ, por

$$\gamma_0(t+\varphi(t)) = \frac{1}{2}\gamma_0(t). \tag{2.1}$$

La función φ, fue presentada en (Sjögren & Soria, 2004) cuando estudiaban al maximal definido sobe bolas de $\mathbb{R}^n$. La estimación para cubos rotados, solo en dimensión 2, lo podemos ver en (Infante & Soria, 2012). En el siguiente teorema veremos la desigualdad modular para el operador maximal sobre cubos, asociado a una familia de medidas absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Teorema 2.1. *Sea $d\mu(x) = \gamma_0(|x|)dx$, con γ_0 continua y decreciente sobre $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Si $\tau(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ es una función decreciente en $(0,\infty)$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \tau(t) = 0,$$

entonces existe una constante C, tal que el operador maximal M_μ^2, definido sobre todos los cubos en $\mathbb{R}^n$ y asociado con la medida μ, verifica la desigualdad modular

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n\colon M_\mu^2 f(x) > \lambda\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda}\left(1+\log^+\frac{|f|}{\lambda}\right)^n d\mu, \qquad \forall\lambda > 0.$$

Estudiemos el caso de los cubos paralelos a los ejes de coordenadas. Sea Q un cubo de $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados, cuyo punto más cercano al origen es Δ_Q, su distancia al origen es $|\Delta_Q| = q_Q = q > 0$ y de longitud $\ell > \phi(q)$. Denotaremos por Γ_Q al poliedro (infinito) más pequeño con vértice en Δ_Q que contiene a Q, y por S_Q al cono más pequeño conteniendo al cubo Q

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

con vértice en el origen 0 y eje de simetría conteniendo al segmento $\overline{0\Delta_Q}$. Sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ los ángulos formados por los vértices del poliedro Γ_Q.

Si suponemos que $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_n$, entonces

$$\frac{\pi}{2} \geq \theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_{n-1} \geq \frac{\pi}{4} \geq \theta_n \geq 0.$$

Sea

$$\Sigma_Q(t) = \left\{\omega \in S^{n-1}: t\omega \in \Gamma_Q \cap S_Q\right\}.$$

Si $\alpha = \frac{\Delta_Q}{|\Delta_Q|} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ es la proyección de Δ_Q sobre S^{n-1}, entonces

$$\Sigma_Q(t) \subset \left\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}): \left|\omega_j - \alpha_j\right| \leq \frac{t^2 - q^2}{t\sqrt{t^2 - q^2}\ \sin\theta_j} \wedge \frac{\ell}{\ell + q}\right\},$$

Son rectángulos con lados paralelos a los ejes en S^{n-1}.

Además,

$$\sigma\left(\Sigma_Q(t)\right) \leq C.$$

Por otra parte, $\mu(Q) \geq \gamma_0(q)m_Q$, donde

$$m_Q = |Q \cap \{y \in \mathbb{R}^n: q < |y| < q + \phi(q)\}|$$

y obtenemos

$$m_Q \geq \left[\prod_{j=1}^{n-1}(\ell \wedge \ell_j)\right]\phi(q)$$

con

$$\ell \sim \frac{q\phi(q)}{\sqrt{q^2\cos^2\theta_j + q\phi(q)}}.$$

Así que

$$\frac{\sigma\left(\Sigma_Q(t)\right)\mu\left(A_q\right)}{\mu(Q)} \leq \max\left(1, \left(\frac{t-q}{t}\frac{q}{\phi(q)}\right)^{n-1}\right).$$

Tomemos ϵ y ϵ' dos constantes positivas, cuyos valores daremos más adelante (el valor de ϵ' dependerá de ϵ implícitamente), y sea $\Psi(v) = e^{v^{1/(n-1)}}$

En el caso,

$$\max\left(1, \left(\frac{t-q}{\phi(q)}\frac{q}{t}\right)\right) = \left(\frac{t-q}{\phi(q)}\frac{q}{t}\right)$$

se tiene

$$\int_q^\infty \Psi\left(\epsilon'\sigma\left(\Sigma_Q(t)\right)\frac{\mu(A_q)}{\mu(Q)}\right)\gamma_0(t)t^{n-1}\,dt \le \int_q^\infty exp\left(\epsilon\frac{t-q}{\phi(q)}\frac{q}{t}\right)t^{n-1}\gamma_0(t)dt$$

$$= \int_q^{2q}\dots + \int_{2q}^{q}\dots = I + II.$$

Para estimar I utilizamos el Teorema 2.1, tomando $\epsilon = \frac{\log 2}{2}$.

$$I \le 2^n\gamma_0(q)q\int_q^{2q} exp\left(-\epsilon\frac{t-q}{\phi(q)}\right)dt$$

$$\le 2^n\gamma_0(q)q\phi(q)\int_0^\infty \exp(-\epsilon s)\,ds \sim \mu(A_q).$$

Para estimar II, hacemos el cambio de variables $t = 2s$

$$II \le \int_{2q}^\infty exp\left(\epsilon\frac{q}{\phi(q)}\right)t\gamma_0(t)dt$$

$$= 2^n e^{\epsilon\frac{1}{\tau(q)}}\int_q^\infty \gamma_0(2s)s^{n-1}\,ds.$$

Utilizando el Teorema 2.1, con $t = 2s$ y $q = s$, tenemos

$$II \le 2^n e^{\epsilon\frac{1}{\tau(q)}}\int_q^\infty \gamma_0(s)\exp\left(-\frac{s}{2\varphi(s)}\,log\,2\right)\ s\,ds$$

$$\le 2^n e^{\epsilon\frac{1}{\tau(q)}}e^{-\frac{\log 2}{2}\frac{1}{\tau(q)}}\int_q^\infty 2\gamma_0(s)s\,ds$$

$$\sim \mu(A_q).$$

En el otro caso,

$$\max\left(1,\left(\frac{t-q}{\phi(q)}\frac{q}{t}\right)\right)=1$$

se tiene

$$\int_q^{\infty}\Psi\left(\epsilon'\sigma\big(\Sigma_R(t)\big)\frac{\mu\big(A_q\big)}{\mu(Q)}\right)\gamma_0(t)t\,dt\ \le\ \int_q^{\infty}xp(\epsilon)t\gamma_0(t)dt\ \ e$$

$$\sim\ \mu(A_q).$$

La proposición 2.4 de (Infante & Soria, 2012), no va a permitir obtener la conclusión deseada:

Proposición 2.4 (Infante & Soria, 2012). *Si para algún $m>0$ existen dos constantes C y ϵ tales que $d\mu(x)=\gamma_0(|x|)dx$ satisface la desigualdad*

$$\int_q^{\infty}exp\left(\epsilon\frac{\sigma\Big(\Sigma_Q(t)\Big)\mu\big(A_q\big)}{\mu(Q)}\right)^{\frac{1}{m}}\gamma_0(t)dt\le C\mu\big(A_q\big)$$

Para todo cubo Q que no contiene al origen, $q=q_Q$ y de lado mayor que $\phi(q)$, entonces el operador maximal asociado a μ satisface la desigualdad modular

$$\mu\big(\{x\colon M_\mu^2 f(x)>\lambda\}\big)\le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f|}{\lambda}\left(1+\ log^+\frac{|f|}{\lambda}\right)^{m+1}d\mu.$$

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se extendió el resultado a $\mathbb{R}^n$ para todo n y además se probó que el exponente que se obtiene en la desigualdad modular es óptimo. Se presentó una desigualdad en cuasi norma que permite complementar el resultado.

Un caso particular es el operador maximal definido sobre rectángulos paralelos a los ejes que es reminiscente del Teorema de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund, ver de Gusman (1975.) y Zygmund (1968) sobre la acotación del operador maximal fuerte.

Fue interesante conocer el comportamiento, en este caso, de las medidas de tipo $e^{-|x|^{\delta}}dx$ para $\delta\neq 2$. Como se vio en este trabajo, la desigualdad para estas medidas es al menos válida en $\mathbb{R}^n$ con exponente n. En este trabajo investigativo se demostró la desigualdad modular para el operador maximal definido con cubos (rotados) de $\mathbb{R}^n$ y asociado a una famila de medida radial y decreciente. Se utilizó la misma técnica que fue introducida en Sjögren & Soria (2004), como la medida es

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

decreciente algunos de los lemas empleados se encuentran en el mismo trabajo del autor mencionado recientemente, pero con ciertas variaciones, se representó las pruebas con la intención de que este trabajo sea auto contenido.

5 DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

6 REFERENCIAS

Bourgain, J. (2014). On the Hardy-Littlewood maximal function for the cube. *Isr. J. Math. 203*, 275-293.

de Gusman, M. (1975.). Differentiation of Integrals in Rn . *Lecture Notes in Mathematics, no. 481, ,* .

Ghosh, A., & Mohanty, P. (2022). Ghosh, A., & MohaWeighted inequalities for higher dimensional one-sided Hardy–Littlewood maximal function in Orlicz spaces. *Expositiones Mathematicae 40(1)*, 23-44.

Infante, A., & Soria, F. (2012). On estimates of the maximal operator associate to nondoubling measures. *Bol. Soc. Mat. Mexicana(3) Vol 18*, 1-19.

Pérez, C., & Trujillo-Gonzales, R. (2001). *El principio de Calderón-Zygmund.* España: Margarita Mathematica.

Sjögren, P., & Soria, F. (2004). Sharp estimates for the non centered maximal operator associated to gaussian and other radial measures,. *Advances in Mathematics*, no. 3 112-134.

Zygmund, A. (1968). Trigonometric Series. *Cambridge Univ. Press*, .

Contribución de autores

Autor	Contribución
Yoconda Chávez	Búsqueda bibliográfica, revisión y diseño del artículo
Adrián Infantes	Metodología, Concepción, redacción