



LA ÚLTIMA CURVA INVARIANTE PARA EL STANDARD MAP

Emilio Andrés Conforme Parrales¹ , Oswaldo José Larreal Barreto² 

¹ Estudiante de la Maestría Académica con Trayectoria de Investigación en Matemática, Instituto de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador

² Departamento de Matemáticas y Estadística, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador

*Autor para correspondencia: econforme1113@utm.edu.ec

Recibido: 3-10-2021/ Aceptado: 12-12-2022 / Publicación: 26-12-2022

Editor Académico: Luis Bladismir Ruiz Leal 

RESUMEN

El Standard map, es una de las aplicaciones más conocida y usada en sistemas dinámicos debido a sus propiedades y aplicaciones físicas; este trabajo está centrado en determinar la última curva invariantes. Para ello se hace necesario colocar condiciones en el parámetro para garantizar la existencia de la región invariante, lo cual está garantizada usando los Teoremas: Twist de Moser, KAM, forma normal de Birkhoff y el teorema de Denjoy. Uniendo todos estos resultados junto con el cálculo del número rotación, logramos encontrar numéricamente los valores iniciales de las órbitas que permite hallar la última curva invariante.

Palabras clave: Forma normal de Birkhoff, número de rotación, Standard map, variedades invariantes, KAM, teorema de Denjoy.

LAST INVARIANT CURVE FOR THE STANDARD MAP

ABSTRACT

The standard map is one of the best known and used applications in dynamic systems, due to its physical properties and applications, this work is focused on determining the last invariant curve, for the same it is necessary to place conditions in the parameter to guarantee the existence of the invariant region, which is guaranteed using the Theorems: Moser's Twist, KAM, Birkhoff's normal form and Denjoy's theorem, uniting all these results, along with the calculation of the rotation number, we are able to find numerically the initial values of the orbits that allow to find the last invariant curve.

Keywords: Birkhoff normal form, Denjoy's theorem, invariant manifolds, KAM, rotation number, Standard map.

A ÚLTIMA CURVA INVARIÁVEL PARA STANDARD MAP

RESUMO



O Standard map é uma das aplicações mais conhecidas e utilizadas em sistemas dinâmicos, devido às suas propriedades físicas e aplicações, este trabalho está focado em determinar a última curva invariante, para a mesma é necessário colocar condições no parâmetro para garantir a existência da região invariante, que é garantida usando os Teoremas: Torção de Moser, KAM, forma normal de Birkhoff e teorema de Denjoy, unindo todos esses resultados, juntamente com o cálculo do número de rotação, conseguimos encontrar numericamente os valores iniciais das órbitas que permitem encontrar a última curva invariante.

Palavras chave: Forma normal de Birkhoff, KAM, número de rotação, Standard map, variedades invariantes, teorema de Denjoy.

Citación sugerida: Emilio Andrés Conforme Parrales, Oswaldo José Larreal Barreto . La última curva invariante para el Standard map. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 7, No. 3, Septiembre/Diciembre, 2022, Ecuador (p. 89 -106). DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5083>





1. INTRODUCCIÓN

El “Chirikov-Taylor Standard map” es una aplicación (mapa), definida por: $(\theta, r) \rightarrow T_\mu(\theta, r)$

$$T_\mu : \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta + f_\mu(\theta, r) \\ f_\mu(\theta, r) \end{pmatrix}$$

donde $f_\mu(\theta, r) = r + \mu \sin(\theta)$ y μ es un parámetro de valores reales.

T_μ es un mapa Twist conservativo, quizás sea uno de los más famosos debido a sus aplicaciones entre ellas a la física de plasma, mecánica celeste, materia condensada, aceleradores de partículas y en varios campos más Balescu (2000). Este fue presentado por Chirikov B. Chirikov (1971); B. V. Chirikov (1979) como un modelo que presenta múltiples resonancias no lineales. En los últimos cincuenta años, se han realizado muchos estudios que se han centrado en comprender varias propiedades de los mapas que preservan área, en particular el standard map Bustamante y Calleja (2019); Calleja y cols. (2022); Cincotta y Simó (2020). Muchos de los fenómenos que están relacionados con el caos generado por un mapa, tienen relación con la invarianza de un conjunto por un mapa; motivos por los cuales este trabajo está centrado en establecer una frontera del conjunto invariante. Para lograr este cometido, el trabajo se distribuye inicialmente con las propiedades del standard map, parametrización de las variedades invariantes, la teoría que garantiza la existencia de curvas invariantes y por último los cálculos numéricos que permiten hallar números de rotación para determinar la última curva invariante.

2. ALGUNAS PROPIEDADES DEL STANDARD MAP

2.1 Propiedades

Las propiedades más resaltantes del Standard map son:

- T_μ es periódica respecto a θ , $T_\mu(\theta + 2n\pi, r) = T_\mu(\theta, r)$.
- T_μ es conservativa, $DT_\mu(\theta, r) = \begin{bmatrix} \mu \cos(\theta) + 1 & 1 \\ \mu \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}$, $\det(DT_\mu(\theta, r)) = 1$.
- Los puntos fijos son: $\{(\pi n, 0)/n \in \mathbb{Z}\}$, debido a que T_μ es periódica respecto a la primera coordenada entonces existen dos clases que están dadas por: $p_j = (\pi \cdot j, 0)$, $j = 0, 1$.
- La matriz jacobiana en los puntos fijos está dada por $DT_j = DT_\mu(p_j) = \begin{bmatrix} (-1)^j \mu + 1 & 1 \\ (-1)^j \mu & 1 \end{bmatrix}$, $j = 0, 1$
- Los polinomios característico de las linealizaciones de T_μ en los puntos fijos son: $p_{DT_j}(x) = x^2 - (2 + (-1)^j \mu)x + 1$, $j = 0, 1$.
- Para $j = 0$, $\lambda^2 - (2 + \mu)\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} = \left(\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4 \sinh^2(h/2)$, con $\lambda = e^h$.

- Los autovalores de las matrices DT_j , $j = 0, 1$, son reales y distintos si: $(2 + (-1)^j \mu)^2 - 4 > 0$ y serán complejos conjugados cuando: $(2 + (-1)^j \mu)^2 - 4 < 0$.
- Los autovalores de las matrices DT_j , $j = 0, 1$, son: $\left\{ \frac{2+(-1)^j \mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2+(-1)^j 4\mu}}{2} \right\}$.
- Consideraremos el caso en el cual p_1 , es un punto elíptico es decir: $(2-\mu)^2-4 < 0 \Rightarrow \mu \in (0, 4)$, con lo cual obtenemos adicionalmente que el punto p_0 es hiperbólico.
- DT_0 , tiene los vectores propios $\left\{ \left[\mu + \sqrt{\mu(\mu+4)} \right], \left[\mu - \sqrt{\mu(\mu+4)} \right] \right\}$ asociado a los valores propios $\left\{ \frac{\mu+2}{2} - \frac{\sqrt{\mu(\mu+4)}}{2}, \frac{\mu+2}{2} + \frac{\sqrt{\mu(\mu+4)}}{2} \right\}$

$$DT_1 = \begin{bmatrix} -\mu+1 & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}, \text{ es equivalente a: } \begin{bmatrix} \frac{2-\mu}{2} - \frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{2-\mu}{2} + \frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2}i \end{bmatrix}, \text{ o a } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

donde i denota la unidad imaginaria, $\frac{2-\mu}{2} = \cos \alpha$ y $\frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2} = \sin \alpha$.

2.2 Estabilidad del Standard Map

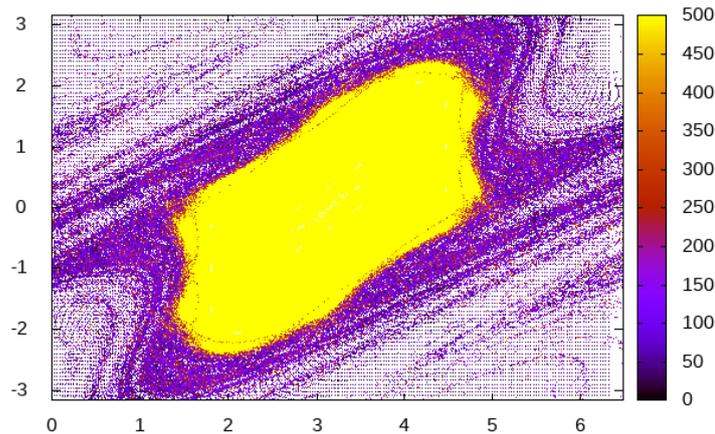


Figura 1. Gráfica de 50000 iteradas de puntos, en el Standard Map con $\mu = 2.04$. El eje horizontal corresponde con θ mientras el vertical es r , la barra de color indica el orden de permanencia de la iterada.

Fuente: Elaboración propia.

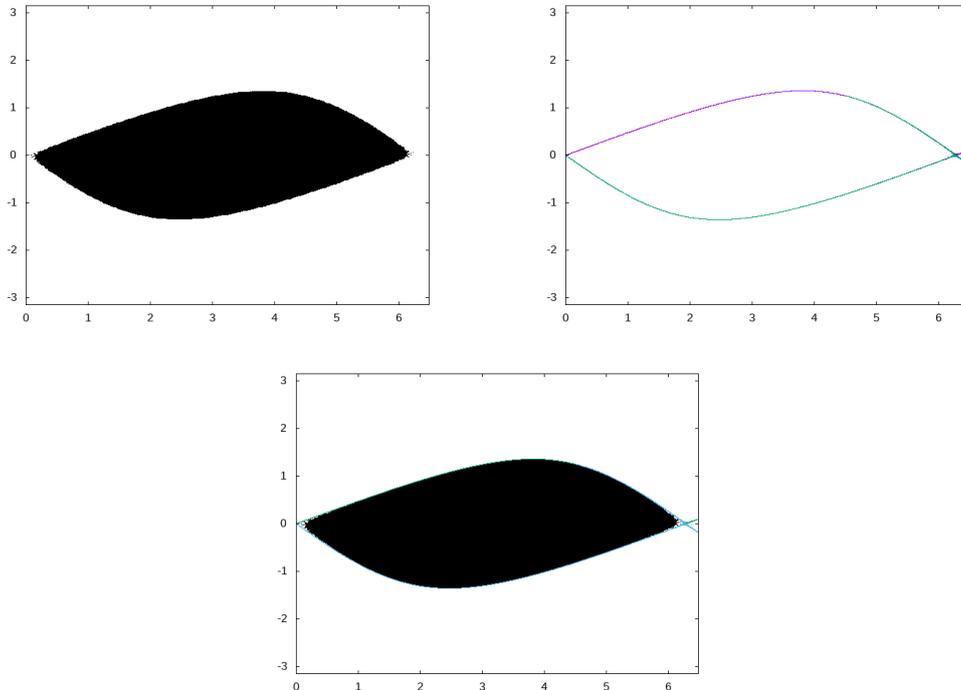


Figura 2. Arriba a la izquierda región de estabilidad, derecha variedades invariantes del origen, abajo variedades invariantes del origen y región de estabilidad, para $\mu = 0.44$.

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1, se observan dos regímenes uno de estabilidad y otro de inestabilidad, nuestro enfoque consiste en identificar puntos o regiones de estabilidad y luego determinar los puntos fijos estables no asintóticos (estos puntos son los llamados elípticos). La estabilidad asintótica de un punto fijo ocurre cuando la curva generada por las iteradas de la aplicación en un punto cercano al fijo tienden al punto fijo, mientras que los puntos fijos inestables son todos aquellos puntos tales que al iterar con la aplicación no permanecen en un región acotada. Formalmente esto se escribe como:

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Definición 2.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el punto x_0 es un punto periódico de f con periodo q si $f^q(x_0) = x_0$. Donde la notación $f^i(x)$ significa: $f^i(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{i\text{-veces}}$.

Definición 2.3. Al conjunto de todas las iteradas del punto x_0 se le conoce como órbita positiva de x_0 .

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Al conjunto de las iteradas de la inversa de f en x_0 se le dice órbita negativa de x_0

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n = 0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{O}_{f^{-1}}^+(x).$$

Definición 2.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $f(x_0) = x_0$ y $Df(x_0)$ no tiene autovalores de módulo uno.

Definición 2.5. Los subespacios estable, central e inestable de una transformación lineal $Tx = Ax$, donde A es una matriz $n \times n$ real, están definidos respectivamente como

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Gen} \{u_j, v_j : |\lambda_j| < 1\} \\ E^c &= \text{Gen} \{u_j, v_j : |\lambda_j| = 1\} \\ E^u &= \text{Gen} \{u_j, v_j : |\lambda_j| > 1\} \end{aligned}$$

Donde $\lambda_j = a_j + ib_j$, son los autovalores asociados con los vectores propios $w_j = u_j + iv_j$, es decir $Aw_j = \lambda_j w_j$, con $j = 1 \dots n$.

Definición 2.6 (Variedad Estable e Inestable). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La variedad estable $W^s(x_0)$ de f en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es $\{x : \lim_{i \rightarrow \infty} f^i(x) = x_0\}$, y la variedad inestable $W^u(x_0)$ de f en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es $\{x : \lim_{i \rightarrow -\infty} f^i(x) = x_0\}$.

Teorema 2.1 (Teorema de la variedad estable para mapas). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces existen variedades locales invariantes estables S e inestables U de clase C^1 tangente al subespacio estable e inestable E^s y E^u de $Df(x_0)$ y de la misma dimensión.

Del teorema de la variedad estable se desprende, que para realizar un análisis cualitativo, es necesario linealizar la ecuación en los puntos fijos y observar los autovalores para así determinar una aproximación a las variedades invariantes.

Como una primera aproximación a la región de estabilidad del Standard Map, tenemos la variedades invariantes del origen; sin embargo como se observa en la figura 3, en términos generales no representa la frontera de la región de estabilidad.

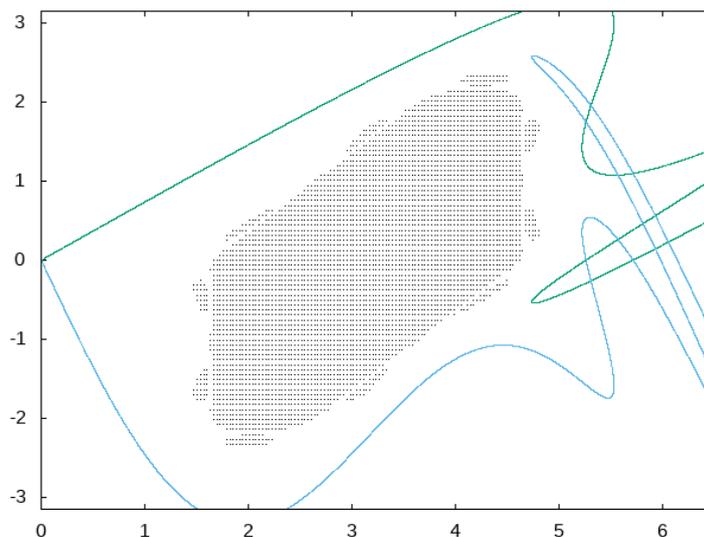


Figura 3. Región de estabilidad y variedades invariantes, para $\mu = 2.04$. Fuente: Elaboración propia.



Como referencia importante para obtener las aproximaciones a las variedades usaremos los artículos Cabre y cols. (2005); Fontich (2006); Haro (2016); Simo (1990), y el libro Romero y cols. (2016), con lo cual tenemos que las parametrizaciones “naturales” de las variedades locales están dadas por:

$$\psi_{loc}^{s,u}(t) = (x^{s,u}(t), y^{s,u}(t)),$$

donde $x^{s,u}(t) = \sum_{i=0} a_i^{s,u} t^i$ y $y^{s,u}(t) = \sum_{i=0} b_i^{s,u} t^i$, s denota estable y u inestable, las cuales deben cumplir la propiedad

$$T_\mu(\psi^{s,u}(t)) = \psi^{s,u}(\lambda^{s,u}t)$$

donde $\lambda^u = 1/\lambda^s = \lambda > 1$, donde λ^s y λ^u son los autovalores de $DT_\mu(0, 0)$.

Proposición 2.1. *La variedad local del origen $W_{loc}^u(0, 0)$ de la aplicación T_μ se puede parametrizar como:*

$$\psi_{loc}^u(t) = (x^u(t), y^u(t)) \tag{1}$$

$$= \left(\sum_{i=0} a_i t^i, \sum_{i=0} b_i t^i \right) \tag{2}$$

donde los coeficientes a_i y b_i están dados por las siguientes ecuaciones recursivas.

$$s_k^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i$$

$$a_k = \frac{\lambda^k \mu s_k^*}{((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu c_0)} = \frac{\lambda^k \mu s_k^*}{((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu)}$$

$$c_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} s_{k-i} i a_i$$

$$s_k = s_k^* + a_k$$

$s_0 = 0$, $c_0 = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $a_1 = 2c$, $b_1 = \left(-\mu + \sqrt{\mu(\mu + 4)}\right) c$, con c pequeño.

Prueba. Recordemos que: $T_\mu(\theta, r) = (\theta + f_\mu(\theta, r), f_\mu(\theta, r))$, donde $f_\mu(\theta, r) = r + \mu \sin(\theta)$, así

$$T_\mu(x(t), y(t)) = (x(\lambda t), y(\lambda t))$$

$$\Rightarrow (x(t) + f_\mu(x(t), y(t)), f_\mu(x(t), y(t))) = (x(\lambda t), y(\lambda t))$$

$$\begin{cases} x(\lambda t) = x(t) + f_\mu(x(t), y(t)) & \Rightarrow y(t) = x(\lambda t) - x(t) - \mu \sin(x(t)) \\ y(\lambda t) = f_\mu(x(t), y(t)) = \mu \sin(x(t)) + y(t) \end{cases} \tag{3}$$

Por lo tanto:

$$y(\lambda t) - y(t) = \mu \sin(x(t)) \Rightarrow x(\lambda^2 t) - 2x(\lambda t) + x(t) = \mu \sin(x(\lambda t))$$

Usando

$$\begin{aligned}\psi_{loc}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= \left(\sum_{i=0} a_i t^i, \sum_{i=0} b_i t^i \right)\end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\left(\mu \sin \left(\sum_{k=0} t^k a_k \right) + \sum_{k=0} t^k a_k + \sum_{k=0} t^k b_k, \mu \sin \left(\sum_{k=0} t^k a_k \right) + \sum_{k=0} t^k b_k \right) = \left(\sum_{k=0} (\lambda t)^k a_k, \sum_{k=0} (\lambda t)^k b_k \right). \quad (4)$$

Por Taylor podemos escribir los desarrollos de las series formales:

$$\begin{aligned}\sin x(t) &= \sum_{k=0} s_k t^k \\ \cos x(t) &= \sum_{k=0} c_k t^k\end{aligned}$$

Ahora derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}\sin x(t) &= \sum_{k=0} s_k t^k \Rightarrow \cos x(t) x'(t) = \sum_{k=0} (k+1) s_{k+1} t^k \\ \cos x(t) &= \sum_{k=0} c_k t^k \Rightarrow -\sin x(t) x'(t) = \sum_{k=0} (k+1) c_{k+1} t^k \\ &\Rightarrow \sum_{j=0} t^j c_j \sum_{i=0} (i+1) a_{i+1} t^i = \sum_{k=0} (k+1) s_{k+1} t^k \\ &\Rightarrow -\sum_{j=0} t^j s_j \sum_{i=0} (i+1) a_{i+1} t^i = \sum_{k=0} (k+1) c_{k+1} t^k \\ &\Rightarrow \sum_{j=0} \sum_{i=0} c_j (i+1) a_{i+1} t^{i+j} = \sum_{k=0} (k+1) s_{k+1} t^k \\ &\Rightarrow -\sum_{j=0} \sum_{i=0} s_j (i+1) a_{i+1} t^{i+j} = \sum_{k=0} (k+1) c_{k+1} t^k \\ &\qquad\qquad\qquad k = i + j \Rightarrow j = k - i \\ &\Rightarrow \sum_{k=0} \left(\sum_{i=0}^k c_{k-i} (i+1) a_{i+1} \right) t^k = \sum_{k=0} (k+1) s_{k+1} t^k \\ &\Rightarrow -\sum_{k=0} \left(\sum_{i=0}^k s_{k-i} (i+1) a_{i+1} \right) t^k = \sum_{k=0} (k+1) c_{k+1} t^k \\ (k+1) s_{k+1} &= \sum_{i=0}^k c_{k-i} (i+1) a_{i+1} \Rightarrow s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_{k-i} i a_i \\ (k+1) c_{k+1} &= -\sum_{i=0}^k s_{k-i} (i+1) a_{i+1} \Rightarrow c_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_{k-i} i a_i\end{aligned}$$



Regresando nuevamente a (4), entonces la ecuación $F(\psi^{s,u}(t)) = \psi(\lambda^{s,u}t)$, la escribimos como:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k t^k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k t^k \right) = \left(\mu \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \mu \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right).$$

De lo cual deducimos:

$$(\lambda^k - 1)a_k = \mu s_k + b_k$$

y

$$(\lambda^k - 1)b_k = \mu s_k$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos: $a_k = \frac{\lambda^k}{\lambda^k - 1} b_k$, $b_k = \frac{\mu}{\lambda^k - 1} s_k \Rightarrow a_k = \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda^k - 1)^2} s_k$ De (2) y (3) obtenemos:

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_{k-i} i a_i$$

$$c_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_{k-i} i a_i$$

$$a_k = \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda^k - 1)^2} s_k$$

$$a_k = \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda^k - 1)^2 k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i + c_0 k a_k \right)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda^k \mu c_0}{(\lambda^k - 1)^2} \right) a_k = \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda^k - 1)^2 k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i$$

$$\left((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu c_0 \right) k a_k = \lambda^k \mu \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i$$

$$a_k = \frac{\lambda^k \mu}{\left((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu c_0 \right) k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i$$

Así las ecuaciones a_k , s_k y c_k son:

$$a_k = \frac{\lambda^k \mu}{\left((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu c_0 \right) k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i$$

$$c_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_{k-i} i a_i = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} s_{k-i} i a_i \text{ ya que } s_0 = 0$$

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_{k-i} i a_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i + a_k \text{ ya que } c_0 = 1$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
 s_k^* &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} c_{k-i} i a_i \\
 a_k &= \frac{\lambda^k \mu s_k^*}{((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu c_0)} = \frac{\lambda^k \mu s_k^*}{((\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu)} \\
 c_k &= -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} s_{k-i} i a_i \\
 s_k &= s_k^* + a_k
 \end{aligned}$$

$s_0 = 0, c_0 = 1, a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = 2c, b_1 = \left(-\mu + \sqrt{\mu(\mu + 4)}\right) c$, debemos de considerar c pequeño, y así obtenemos como vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ \mu - \sqrt{\mu(\mu + 4)} \end{bmatrix}$ □

2.3 Relación entre las variedades locales

Si suponemos $\lambda > 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 a_k^u &= \frac{\lambda^k \mu s_k^*}{(\lambda^k - 1)^2 - \lambda^k \mu} = \frac{\mu s_k^*}{\left(\lambda^{\frac{k}{2}} - \lambda^{-\frac{k}{2}}\right)^2 - \mu} = a_k^s \\
 a_k^u &= \frac{\lambda^k}{\lambda^k - 1} b_k^u \text{ y } a_k^s = \frac{\lambda^{-k}}{\lambda^{-k} - 1} b_k^s = \frac{1}{1 - \lambda^k} b_k^s \Rightarrow \frac{1}{1 - \lambda^k} b_k^s = \frac{\lambda^k}{\lambda^k - 1} b_k^u \Rightarrow b_k^s = -\lambda^k b_k^u
 \end{aligned}$$

Por tal motivo existe R tal que:

$$\begin{aligned}
 \psi_{loc}^u &= R \circ \psi_{loc}^s \\
 \psi_{loc}^s(t) &= \left(\sum_{k=0} a_k^s t^k, \sum_{k=0} b_k^s t^k \right) = \left(\sum_{k=0} a_k^u t^k, \sum_{k=0} -b_k^u (\lambda t)^k \right) \Rightarrow \begin{cases} x_{loc}^s(t) = x_{loc}^u(t) \\ y_{loc}^s(t) = -y_{loc}^u(\lambda t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$R(x, y) = (x, -f_\mu(x, y))$$

$$R \circ \psi^u(t) = \psi^s(t)$$

$$R(\psi_{loc}^u(t)) = (x_{loc}^u(t), -f_\mu(x_{loc}^u(t), y_{loc}^u(t))) = (x_{loc}^u(t), -y_{loc}^u(\lambda t)) = (x_{loc}^s(t), y_{loc}^s(t))$$

Como $f_\mu(x, y) = \mu \sin(x) + y$, obtenemos $f_\mu(x, -f_\mu(x, y)) = \mu \sin(x) - f_\mu(x, y) = -y$.

Por lo tanto $R(R(x, y)) = R(x, -f_\mu(x, y)) = (x, -f_\mu(x, -f_\mu(x, y))) \Rightarrow R \circ R = I$

Lema 2.1. Existe $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que:

$$R \circ \psi^u(t) = \psi^s(t) \text{ y } R \circ R = I$$

3. EXISTENCIAS DE CURVAS INVARIANTES

Nuestra meta es determinar la última curva invariantes, en Oswaldo (2021) se muestra cuales son las condiciones que garantiza la existencia de la última curva invariante para la ecuación del microtrón. En el mismo artículo se pone de manifiesto que debemos usar los teoremas: KAM, formas



normales de Birkhoff y el teorema Twist de Moser. Nosotros vamos a suponer que tenemos todas las condiciones para la existencia de curvas invariantes así de esta manera nos enfocaremos en la determinación de la misma. Obviamente la determinación paramétrica de la última curva invariante será de forma numérica, para lo cual usaremos los números de rotación y fracciones continuas.

Lema 3.1. Sea L un operador lineal de \mathbb{R}^2 sobre el cuerpo \mathbb{R} , y sea $\lambda = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) un valor propio de L , con vector propio $v = v_1 + v_2i$, entonces $[L]_{\{v_1, v_2\}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Prueba. Sea $Lv = \lambda v$, como $\lambda = a + ib$, entonces tenemos $L(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = av_1 - bv_2 + (av_2 + bv_1)i$

$$\begin{aligned} Lv_1 &= av_1 - bv_2 \\ Lv_2 &= bv_1 + av_2 \end{aligned} \Rightarrow [L]_{\{v_1, v_2\}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \quad \square$$

De las propiedades 2.1, considerando el caso en el cual $(2 - \mu)^2 - 4 < 0$ y aplicando el lema anterior en $DT\mu$, tenemos que: $a = \frac{2-\mu}{2}$, $b = \frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2}$ y podemos usar como vectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \mu \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{-\mu^2+4\mu} \end{bmatrix}, \text{ así } DT\mu \text{ es semejante con: } \begin{bmatrix} \frac{2-\mu}{2} & \frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2} \\ -\frac{\sqrt{-\mu^2+4\mu}}{2} & \frac{2-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1 (de Jacobi). Sea $T_\theta(\alpha) = \alpha + \theta$ una aplicación de \mathbf{S}^1 en \mathbf{S}^1 . Si θ/π es irracional, entonces la órbita de cualquier punto es densa en \mathbf{S}^1 . Denotamos a \mathbf{S}^1 , a la circunferencia unitaria. (ver Devaney (1989) págs. 22 – 23).

El teorema anterior garantiza la existencia de curvas invariantes para la linealización del mapa en los puntos elípticos.

Para generalizar el teorema (3.1) debemos introducir la definición de número de rotación y utilizar el Teorema de Denjoy.

Definición 3.1. Sea el toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con proyección natural $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ un homeomorfismo. La aplicación $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x + 1) = F(x) + 1$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$

es conmutativo. A F se le llama lift de f . F es única salvo traslaciones por enteros.

Definición 3.2. Definimos el número de rotación superior e inferior respectivamente por:

$$\bar{\rho}_F(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

$$\rho_{-F}(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

Si $\bar{\rho}_F(x) = \rho_{-F}(x)$, entonces definimos el número de rotación de F como $\rho_F = \bar{\rho}_F(x) = \rho_{-F}(x)$.

Definición 3.3. *Se define el número de rotación como:*

$$\rho_F := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n}, \quad (5)$$

Dos teoremas que son sumamente importantes para la determinación de la última curva invariante son: el teorema de Poincaré-Adouani y Marzougui (2017) y el teorema de Denjoy-Brette (2003); Dzhalilov y cols. (2018); Hernández-Corbato y cols. (2012); Kwapisz (2000); Lioussé (2005); Misiurewicz (s.f.); Pavani (1995), este último va a permitir determinar la existencia de curvas invariantes bajo la condición, de que el número de rotación ρ_F sea irracional Hernández-Corbato y cols. (2012).

Teorema 3.2 (Denjoy). *(ver Brette (2003); Hernández-Corbato y cols. (2012); Lioussé (2005); Pavani (1995)) Supongamos que el número de rotación ρ_F está bien definido, es decir que el límite existe y es independiente de la condición inicial x_0 . Además si F es de clase C^2 , entonces:*

- ρ_F es racional, si y solo si f tiene un punto periódico.
- Si ρ_F es irracional, entonces cada órbita de f es densa en \mathbb{T} .

Tómese en cuenta que el número de rotación es independiente de la x_0 considerada para una aplicación F que representa el lift de un mapa $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, lo que indica que cada vez que consideramos una órbita de un punto x_0 por T_μ , tenemos un homeomorfismo $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ por cada x_0 de T_μ . Así de esta manera solo necesitamos determinar la ubicación de los puntos para los cuales los números de rotación son irracionales, un método que permite caracterizar un número irracional es el método de fracciones continuas.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

La idea del método consiste primero en suponer que existe una curva invariante cerrada simple \mathcal{C} alrededor del punto elíptico, lo cual está garantizado gracias a los teoremas de formas normales, Twist de Moser y KAM de forma similar como se ha realizado en Oswaldo (2021). Nuestro método consiste en considerar la restricción de la aplicación a \mathcal{C} , con lo que veremos una aplicación que va de \mathcal{C} en \mathcal{C} , entonces elegimos un punto en la curva y verificamos si existe el límite que define el número de rotación. Ahora al tener el número de rotación bien definido verificamos si este mismo es racional o irracional, lo cual nos permitiera determinar si la órbita del punto genera densamente la curva invariante.

En cuanto al algoritmo empleado para el cálculo del número de rotación se siguió el artículo Seara y Villanueva (2006). El algoritmo expuesto en este artículo, permite encontrar en pocos pasos una buena aproximación al valor real del número de rotación, y por otro lado usamos el método de fracciones continuas para determinar si el número de rotación puede ser considerado como “irracional”.

Definición 4.1. *Una fracción continua es una expresión de la forma*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

donde a_0, \dots, a_n son números enteros y a_1, \dots, a_n son positivos.



Procedimiento 1 (Procedimiento para hallar la fracción continua de un número α). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; definimos una secuencia a_n de enteros por inducción de la siguiente forma:

$$a_0 = E(\alpha), \quad y_0 = \{\alpha\}, \quad a_1 = E(1/y_0), \quad y_1 = \{1/y_0\}$$

y

$$a_{n+1} = E\left(\frac{1}{y_n}\right) \quad y \quad y_{n+1} = \left\{\frac{1}{y_n}\right\},$$

donde E y $\{\cdot\}$ denotan respectivamente la parte entera y la parte fraccionaria $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1)$. Esto describe la expansión de fracción continua de α , denotada

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Observación 4.1. Si α es irracional la sucesión que describe su fracción continua no converge, en caso de ser racional, es finita la sucesión de la fracción continua.

Procedimiento 2. Procedimiento para hallar la última curva invariante

1. Debemos calcular un punto P que no escape al infinito, por iteradas de T_μ , para esto tomamos un segmento de recta que inicie en el punto fijo elíptico $\bar{P}_0 = (\pi, 0)$ finalice en punto $\bar{P}_1 = (2\pi, 0)$, este último no pertenece a la región estable debido a que es un punto hiperbólico.
2. Con el item anterior justificamos que \bar{P}_1 , no está en la región de estabilidad. Ahora usando a un método similar al de bisección, vamos a elegir un punto dentro y otro fuera de la región estable, vamos dividiendo el segmento que une los dos puntos en el punto medio P_m , este punto P_m dependiendo de las condiciones que cumpla va a sustituir a uno de los dos puntos anteriores, por ejemplo si P_m está dentro de la región estable entonces sustituye el punto que cumplía está condición y al igual es aplicado al punto que no está dentro de la región estable. Este paso lo vamos a repetir hasta que el error relativo sea menor que E_r dado, o hasta hacer L iteraciones del método.
3. Ahora vamos a determinar si P es punto que genera la curva o genera curvas alrededor de puntos periodicos o es un punto caótico. Para distinguir estos casos vamos a calcular el número de rotación asociado al punto P , siguiendo el algoritmo expuesto en el artículo Seara y Villanueva (2006). Los criterios que vamos a usar son:

- Si el número de rotación de P es irracional para todos los iterados $N = 2^q$, del método de cálculo de número de rotación hasta orden $p = q - 1$ (ver procedimiento 3) y el error relativo es menor que $E_r = 10^{-8}$, entonces P es considerado como un punto que genera la curva.
- Si el número de rotación de P es irracional para todos los iterados del método hasta orden $p = q - 1$ y el error relativo es mayor que E_r entonces P es considerado como un punto caótico.

Para determinar si un número es racional o irracional usamos fracciones continuas, y así definimos la función $I(x)$ que devuelve 1 si x es irracional y cero en caso contrario.

- Si el número de rotación de P es racional para alguna de las iteradas del método de cálculo de número de rotación, entonces a P lo consideramos como un punto que genera curvas alrededor de puntos periódicos.

Procedimiento 3. Procedimiento para el cálculo de número del rotación, basado en Seara y Villanueva (2006):

1. Dado un punto P calculamos $T_0 = \text{atan}_2(P)$, calculamos y definimos $T_n = \text{atan}_2(F_2^n(P))$ y el lift LT de la siguiente forma:

(a) Definimos $LT_0 = T_0$, $LT_1 = T_1$ y $s = 1$

(b) Dependiendo de LT_1 y LT_0 definimos un número d de la siguiente manera:

$$d = \begin{cases} 1 & \text{si } LT_1 > LT_0 \text{ (sentido positivo)} \\ -1 & \text{si } LT_1 < LT_0 \text{ (sentido negativo)} \end{cases}$$

y hacemos $s = 1$.

(c) Si va en sentido positivo y si existe i tal que $T_{i+1} < T_i$, hacemos $LT_{i+1} := T_{i+1} + d \cdot s$. En caso que tengamos negativo y si existe i tal que $T_{i+1} > T_i$, hacemos $LT_{i+1} := T_{i+1} + d \cdot s$. Hacemos $s := s + 1$ en ambos casos. Es decir $LT_{i+1} = T_{i+1} + d \cdot s$, si ocurre algunos de los dos casos y luego $s := s + 1$.

2. Ahora vamos a seguir el algoritmo propuesto en el artículo Seara y Villanueva (2006). Por tal motivo vamos hacer los siguientes paso:

(a) Damos el número de puntos $N = 2^q$ y el orden p de la interpolación, con $p < q$.

(b) Calculamos $S_n^1 = \sum_{i=1}^n (LT_i - LT_0)$, con $n = 1, \dots, N$.

(c) Ahora calculamos $S_n^j = \sum_{i=1}^n S_i^{j-1}$, con $n = 1, \dots, N$ y $j = 2, \dots, p$.

(d) También calculamos \tilde{S}_n^j definido de la siguiente manera:

$$\tilde{S}_n^j = \binom{n+j}{j+1} S_n^j$$

(e) Ahora definimos para cada orden las aproximaciones del número de rotación por:

$$\rho_j = \sum_{l=0}^j c_l^{(j)} \tilde{S}_{2^{q-j+l}}^j + e(j, N)$$

donde $c_l^{(j)} = (-1)^{j-l} \frac{2^{l(l+1)/2}}{\delta_l \delta_{j-l}}$,

$\delta_n := (2^n - 1)\delta_{n-1}$, para $n \geq 1$ y $\delta_0 := 1$.

$e(j, N)$ corresponde al error y está dado por $e(j, 2^q) = \mathcal{O}(2^{-(j+1)q})$

Observación 4.2. Podemos hacer las siguientes recursiones:

- $c_0^{(j)} = \frac{(-1)^j}{\delta_j}$, $c_l^{(j)} = -\frac{2^{j+1}-2^l}{2^l-1} c_{l-1}^{(j)}$

- Definimos $C_0^{q_1} = 2^{q_1}$ y $C_j^{q_1} = \frac{2^{q_1+j}}{j+1} C_{j-1}^{q_1}$, y podemos ver que: $C_j^{q_1} = \binom{2^{q_1+j}}{j+1}$
- Después de calcular $\{S_n^1\}_{n=1}^N$ y sabiendo que $S_1^j = S_1^1$, $j = 1, \dots, p$, podemos hallar recursivamente $S_n^j = S_{n-1}^j + S_n^{j-1}$.

Como un ejemplo de aplicación consideramos el caso $\mu = 0.44$, ver figuras 4(a), 4(b), para lo cual obtenemos la tabla 1 que hace referencia al cálculo del número de rotación.

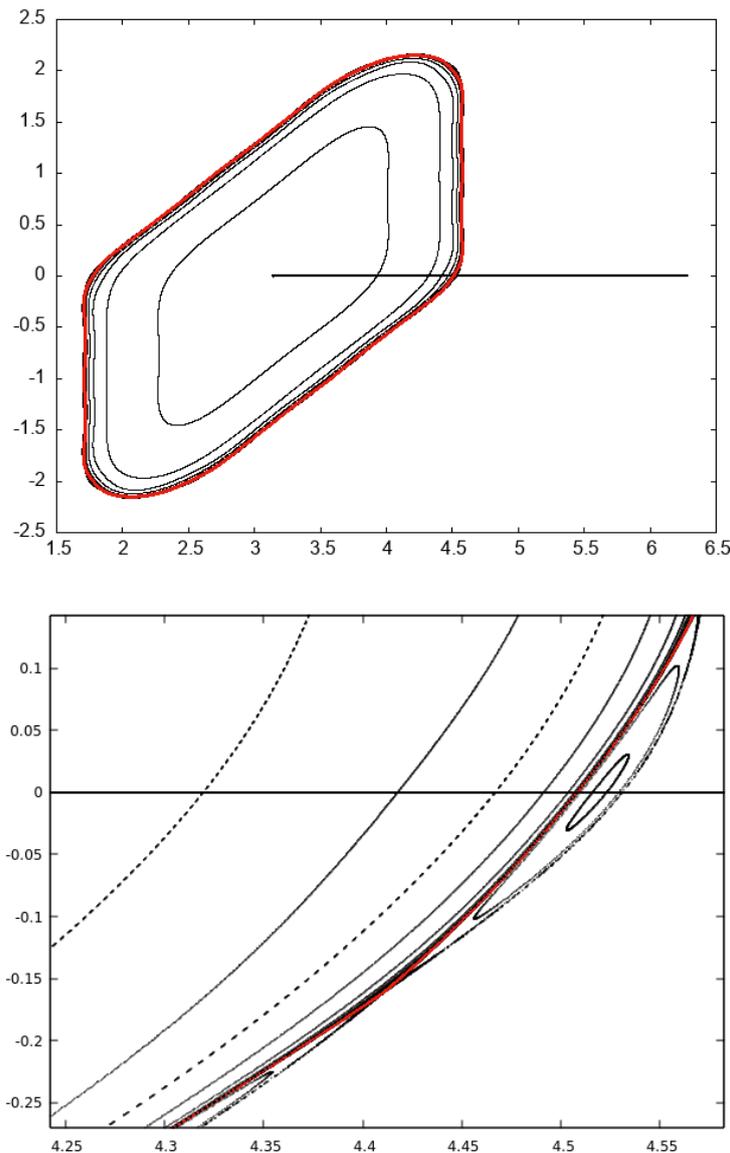


Figura 4. Arriba: Órbita de los puntos hallados usando el método de bisección con el método de número de rotación, sobre el segmento $(0, \pi) - (0, 2\pi)$, para $\mu = 0.44$. Abajo: zoom a la última curva invariante hallado usado el método implementado.

Fuente: Elaboración propia.

p	$\rho_{q=14}$	$\rho_{q=13}$	$E_r(\rho_{q=14}, \rho_{q=13})$	$E_r(p, p-1)$	$I(\rho_{q=14})$
1	-2.0846221384127087e-01	-2.0846213644027534e-01	3.7129508558557416e-07		1
2	-2.0846224526696244e-01	-2.0846223383981585e-01	5.4816384499014627e-08	1.5075003886926894e-07	1
3	-2.0846224419701798e-01	-2.0846224248638351e-01	8.2059678192585833e-09	5.1325575548704981e-09	1
4	-2.0846224400085100e-01	-2.0846224228860283e-01	8.2137088410621569e-09	9.4101918789070995e-10	1
5	-2.0846224376334505e-01	-2.0846224448540907e-01	3.4637640210124258e-09	1.1393236254985648e-09	1
6	-2.0846224357379659e-01	-2.0846224133313460e-01	1.0748526691790140e-08	9.0926998103557690e-10	1
7	-2.0846224352723308e-01	-2.0846223056131361e-01	6.2197927344462332e-08	2.2336660234224969e-10	1
8	-2.0846224340962122e-01	-2.0846221907389795e-01	1.1673923714835980e-07	5.6418784892677785e-10	1
9	-2.0846224291086918e-01	-2.0846221769614315e-01	1.2095584158194188e-07	2.3925293746429297e-09	1
10	-2.0846224182320300e-01	-2.0846223690455210e-01	2.3594924722205231e-08	5.2175692337948088e-09	1
11	-2.0846224013379847e-01	-2.0846228466154323e-01	2.1360100870340920e-07	8.1041273078988852e-09	1
12	-2.0846223804917655e-01	-2.0846236559411946e-01	6.1183715624646998e-07	9.999977887478037e-09	1

Tabla 1. Tabla de número de rotación para $\mu = 0.44$. $\rho \approx -0.20846223804917655$.

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

El algoritmo implementado para determinar la última curva invariante para el standard map, puede ser usado en otras aplicaciones, tomando en cuenta las características intrínsecas de la aplicación. El método para el cálculo de la última curva invariante es independiente del procedimiento del cálculo del número de rotación, motivos por los cuales puede ser usado cualquier otro método en el cálculo de número de rotación que se considere más eficientes.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. REFERENCIAS

- Adouani, A., y Marzougui, H. (2017, nov). Non-rigidity for circle homeomorphisms with several break points. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(9), 2305–2331. Descargado de <https://doi.org/10.1017/etds.2017.121> doi: 10.1017/etds.2017.121
- Balescu, R. (2000). Kinetic theory of the standard map in the localized weak-stochasticity regime. *Journal of Plasma Physics*, 64(4), 379–396. doi: 10.1017/S0022377800008680
- Brette, R. (2003, 12). Rotation numbers of discontinuous orientation-preserving circle maps. *Set-Valued Analysis* 2003 11:4, 11, 359-371. Descargado de <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1025644532200> doi: 10.1023/A:1025644532200
- Bustamante, A. P., y Calleja, R. C. (2019). Computation of domains of analyticity for the dissipative standard map in the limit of small dissipation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 395, 15-23. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278918300289> doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.02.006>



- Cabre, X., Fontich, E., y De la Llave, R. (2005, 11). The parameterization method for invariant manifolds iii: Overview and applications. *Journal of Differential Equations*, 218, 444-515. doi: 10.1016/j.jde.2004.12.003
- Calleja, R. C., Celletti, A., y de la Llave, R. (2022). Kam quasi-periodic solutions for the dissipative standard map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 106, 106111. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421004238> doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106111>
- Chirikov, B. (1971). Institute of nuclear physics, novosibirsk (in russian). *Preprint 267 (1969), Engl. Transl. CERN Trans. 71-40, Geneva.*
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5), 263-379. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157379900231> doi: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(79\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1)
- Cincotta, P. M., y Simó, C. (2020). Global dynamics and diffusion in the rational standard map. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 413, 132661. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278919308140> doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132661>
- Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems* (Second ed.). Redwood City, CA: Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program.
- Dzhalilov, A., Jalilov, A., y Mayer, D. (2018, 2). A remark on denjoy's inequality for pl circle homeomorphisms with two break points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 458, 508-520. doi: 10.1016/J.JMAA.2017.09.003
- Fontich, E. (2006, 01). The parameterization method for invariant manifolds.
- Haro, A. (2016, 04). An overview of the parameterization method for invariant manifolds. En (p. 1-28). doi: 10.1007/978-3-319-29662-3_1
- Hernández-Corbato, L., Ortega, R., y Ruiz del Portal, F. R. (2012). Attractors with irrational rotation number. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 153(1), 59-77. doi: 10.1017/S0305004111000788
- Kwapisz, J. (2000). Poincaré rotation number for maps of the real line with almost periodic displacement. *Nonlinearity*, 13(5), 1841-1854. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/13/5/320> doi: 10.1088/0951-7715/13/5/320
- Liousse, I. (2005). Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphismes affines par morceaux du cercle. *Annales de l'Institut Fourier*, 55, 431-482. doi: 10.5802/aif.2103
- Misiurewicz, M. (s.f.). Rotation theory. En *Dynamical systems and applications: Recent progress.*
- Oswaldo, L. (2021). Existence of invariant curves for the equation of the microtron. *Journal of Mathematical Control Science & Applications (JMCSA).*

- Pavani, R. (1995). A numerical approximation of the rotation number. *Appl. Math. Comput.*, 73(2-3), 191–201. Descargado de [http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003\(94\)00249-5](http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003(94)00249-5) doi: 10.1016/0096-3003(94)00249-5
- Romero, J.-L., Haro, A., Luque, A., Canadell, M., y Mondelo, J. (2016). *The parameterization method for invariant manifolds from rigorous results to effective computations* (Vol. 195). doi: 10.1007/978-3-319-29662-3
- Seara, T. M., y Villanueva, J. (2006). On the numerical computation of Diophantine rotation numbers of analytic circle maps. *Phys. D*, 217(2), 107–120. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2006.03.013> doi: 10.1016/j.physd.2006.03.013
- Simo, C. (1990). On the Analytical and Numerical Approximation of Invariant Manifolds. En D. Benest y C. Froeschle (Eds.), *Modern methods in celestial mechanics* (p. 285-+).

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Emilio Andrés Conforme Parrales	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica
Oswaldo José Larreal Barreto	Concepción, redacción y diseño del artículo