UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador p. 256 -270. Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5090.

UN ESTUDIO DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

Elvin Eduardo Loor Bermeo[1], Adrián Ramón Infante Linares[2]
[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.
Email: eloor4609@utm.edu.ec
[2]Universidad Internacional de Valencia, Valencia, España.
Email: ainfante@usb.ve

*Autor para correspondencia: elvin.loor@educacion.gob.ec

Recibido: 21-08-2022/ Aceptado: 13-12-2022/ Publicación: 27-12-2022
Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza

RESUMEN

En este artículo se presentan los polinomios de Laguerre complejo $L_k^{(\alpha-k)}(z)$, junto con algunas expresiones que resultan a partir de ellos, que aparecen utilizando definiciones mencionadas en el texto. Además, se realiza una revisión de las propiedades de los polinomios de Laguerre y su convergencia en media, estudiada por varios autores a lo largo de la historia. La convergencia de los polinomios de Laguerre empieza con los estudios de Pollard, que plantea que para que se cumpla $\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_0^N a_nP_n(x)\right|^p dF(x)=0$, entonces $p=2$, luego Askey y Wainger plantean una función de Laguerre $\mathfrak{L}_n^\alpha(x)=x^{\alpha/2}r_n\exp(-x/2)L_n^\alpha(x)$ que converge si $4/3<p<4$. En la siguiente investigacion, Muckenhoupt indica que en los polinomios de Laguerre, los términos no convergerán a 0 en la media si p no está entre $4/3$ y 4, pero esta vez probando que p es un número fijo que satisface $1\leq p\leq 4/3$ o $4\leq p\leq\infty$. Luego, el mismo Muckenhoupt generaliza los resultados de Askey y Wainger para la convergencia media con $1<p<\infty$. Los resultados mejoran en términos de las funciones de peso, su investigación se basa en desigualdades que requerían una función de ponderación mayor en el lado derecho que en el izquierdo: $\int_0^\infty|S_n^\alpha(f,x)U(x)|^p dx\leq C\int_0^\infty|f(x)V(x)|^p dx$. Mas adelante, Poiani prueba inecuaciones de la forma $\|\sigma_n(f,x)W(x)\|_p\leq\|f(x)W(x)\|_p$ donde σ_n es la enésima $(C,1)$ convergencia de la serie de Laguerre de f, $W(x)$ la funcion peso de una forma particular y la norma L^p es tomada sobre $(0,\infty)$, aqui solo se utiliza una función de peso. Por último, se encuentra la investigación realizada por Mario Riera, quien estudia dicha convergencia con deltas de Dirac, en este caso para Laguerre con una delta en el cero.

Palabras clave: Convergencia, ortogonalidad, polinomios de Laguerre.

A STUDY OF THE LAGUERRE POLYNOMIALS

ABSTRACT

In this article the complex Laguerre polynomials $L_k^{(\alpha-k)}(z)$ are presented, together with some expressions that result from them, which appear using definitions mentioned in the text. In addition, a review of the properties of the Laguerre polynomials and their convergence in mean, studied by various authors throughout history, is carried out. The convergence of the Laguerre polynomials begins with the studies of Pollard, who posits that for it to be fulfilled
$\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_0^N a_nP_n(x)\right|^p dF(x)=0$, then $p=2$,then Askey and Wainger pose a Laguerre function $\mathfrak{L}_n^\alpha(x)=$

Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

Bases de la Ciencia
Revista Científica
Facultad de Ciencias Básicas
Edición Especial - ISSN 2588-0764

$x^{\alpha/2} r_n \exp(-x/2) L_n^{\alpha}(x)$ which converges if $4/3 < p < 4$. In the following investigation, Muckenhoupt indicates that in the Laguerre polynomials, the terms will not converge to 0 at the mean if p is not between $4/3$ and 4, but this time proving that p is a fixed number that satisfies $1 \leq p \leq 4/3$ or $4 \leq p \leq \infty$. Then the same Muckenhoupt generalizes Askey and Wainger's results for mean convergence with $1 < p < \infty$. The results improve in terms of weighting functions, their research is based on inequalities that required a larger weighting function on the right side than on the left $\int_0^{\infty} |S_n^{\alpha}(f,x)U(x)|^p dx \leq C \int_0^{\infty} |f(x)V(x)|^p dx$. Later, Poiani proves inequalities of the form $\|\sigma_n(f,x)W(x)\|_p \leq \|f(x)W(x)\|_p$ where σ_n is the nth $(C,1)$ convergence of the Laguerre series of f, $W(x)$ the weight function of a particular form and the norm L^p is taken over $(0,\infty)$, here only a weight function is used. Finally, there is the research carried out by Mario Riera, who studies said convergence with Dirac deltas, in this case for Laguerre with a delta at zero

Keywords: Convergence, Laguerre polynomials, orthogonality.

UM ESTUDO DOS POLINÔMICOS DE LAGUERRE

RESUMO

Neste artigo são apresentados os complexos polinômios de Laguerre $L_k^{(\alpha-k)}(z)$, juntamente com algumas expressões deles resultantes, que aparecem usando as definições mencionadas no texto. Além disso, é realizada uma revisão das propriedades dos polinômios de Laguerre e sua convergência em média, estudadas por vários autores ao longo da história. A convergência dos polinômios de Laguerre começa com os estudos de Pollard, que afirma que para $\lim_{N \longrightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_0^N a_n P_n(x) \right|^p dF(x) = 0$, então $p = 2$, então Askey e Wainger postulam uma função Laguerre $\mathfrak{L}_n^{\alpha}(x) = x^{\alpha/2} r_n \exp(-x/2) L_n^{\alpha}(x)$ que converge se $4/3 < p < 4$. Na investigação a seguir, Muckenhoupt indica que nos polinômios de Laguerre, os termos não convergirão para 0 na média se p não estiver entre $4/3$ e 4, mas desta vez provando que p é um número corrigido que satisfaz $1 \leq p \leq 4/3$ ou $4 \leq p \leq \infty$. Então o próprio Muckenhoupt generaliza os resultados de Askey e Wainger para convergência média com $1 < p < \infty$. Os resultados melhoram em termos das funções de peso, sua investigação é baseada em desigualdades que exigiram uma função de peso maior no lado direito do que no esquerdo: $\int_0^{\infty} |S_n^{alfa}(f,x)U(x)|^p dx \leq C \int_0^{\infty} |f(x)V(x)|^p dx$. Mais adiante, Poiani prova desigualdades da forma $\|\sigma_n(f,x)W(x)\|_p \leq \|f(x)W(x)\|_p$ onde σ_n é a enésima convergência $(C,1)$ da série de Laguerre de f, $W(x)$ a função peso de uma forma particular e a norma L^p é assumido $(0,\infty)$, aqui apenas uma função de peso é usada. Finalmente, há a pesquisa realizada por Mario Riera, que estuda a referida convergência com deltas de Dirac, neste caso para Laguerre com delta em zero.

Palavras chave: Convergência, ortogonalidade, polinômios de Laguerre.

Citación sugerida: Loor, E., Infante, A., (2022) Un estudio de los polinomios de Laguerre complejo. Revista Bases de la Ciencia, 7, (No. Especial), Diciembre, p. 256-270.
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5090

1. INTRODUCCIÓN

Los polinomios generalizados de Laguerre, ver Szego (1939), Aloui y Khériji (2019), Gadzhimirzaev (2020), Riahifar y Matinfar (2018), Ali (2021) pertenecen a la familia de polinomios clásicos ortogonales, éstos polinomios se pueden definir mediante la aplicación de la fórmula de Rodrigues como: $e^{-x}x^{\alpha}L_n^{\alpha} = (\frac{d}{dx})^n(e^{-x}x^{\alpha+n})$ para $\alpha > -1$, cuando $\alpha = 0$, los polinomios generalizados de Laguerre se conocen con el nombre de polinomios de Laguerre, cuya fórmula de Rodrigues es $e^{-x}L_n = (\frac{d}{dx})^n(e^{-x}x^n)$.

Como toda familia de polinomios ortogonales, los polinomios de Laguerre cumplen con propiedades tales como: posee una función generatriz, tiene una fórmula de recurrencia, ortogonalidad, entre otras. Damos una definición que extiende a los polinomios de Laguerre al plano complejo, $L_k^{(\alpha-k)}(z)$.

Por otra parte, el estudio de la convergencia de los polinomios de Laguerre se inicia con la investigacion realizada por Pollard, el cual concluye que si $\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_0^N a_nP_n(x)\right|^p dF(x)=0$, el valor de p debe ser 2 para que se cumpla la convergencia; luego, aparece la investigación hecha por Askey y Wainger, quienes proponen una ”función de Laguerre” cuyos valores de p se encuentran entre $3/4$ y 4, cumpliendose $\|S_n - f\|_p \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Continúa con esta línea de investigación Muckenhoupt, quien realiza dos estudios acerca del tema tratado, el primero demuestra que los valores de p deben estar entre $3/4$ y 4, al igual que lo que dice Askey y Wainger, pero esta vez él demuestra probando que si $1 \leq p \leq 4/3$ o $4 \leq p \leq \infty$, la convergencia no se cumple. El segundo estudio lo generaliza para $1 < p < \infty$, aquí se plantean dos funciones: $U(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}(x/(1+x))^{\alpha}(1+x)^b$ y $V(x) = (x/(1+x))^A(1+x)^B(1+\log^+ x)^{\beta}$ donde $B = 1$ si $b = B$, p es $4/3$ o 4 y $\beta = 0$ caso contrario, luego se asumierón varias estimaciones para llegar a la integral $\int_0^{\infty}|S_n^{\alpha}(f,x)U(x)|^p dx \leq C\int_0^{\infty}|f(x)V(x)|^p dx$, siendo la función del lado derecho de mayor ponderación que la del izquierdo, obteniendose el resultado de la convergencia: $\lim_{n\to\infty}\int_E[|S_n^{\alpha}(x) - f(x)|U(x)]^p dx = 0$.

A continuación Poiani muestra la convergencia mediante inecuaciones, tomando la función peso de una forma particular: $W(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}(x/(1+x))^{\alpha}(1+x)^b$, y contrario de Muckenhoupt, sólo utiliza una función para su caso. Para finalizar se encuentra la investigación hecha por Mario Riera, quien propone la convergencia con deltas de Dirac, en este caso con una delta en el cero para los polinomios de Laguerre.

En este trabajo se muestran las propiedades de los polinomios de Laguerre real y la convergencia de éstos, y se presentan nuevos resultados de los polinomios de Laguerre complejo.

2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

En la primera parte de este trabajo vamos a introducir las definiciones y propiedades necesarias para caracterizar a los polinomios de Laguerre, éstas son propiedades que poseen los polinomios ortogonales en general, pero describimos el caso de los polinomios de Laguerre para recopilar y entender su naturaleza. Los polinomios de Laguerre son una sucesión de polinomios ortogonales denotados por $L_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots,$ y definidos para x en el intervalo $[0, \infty)$ con respecto al producto escalar definido por el peso $w(x) = e^{-x}$.

$$\langle L_n, L_m\rangle = \int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = \delta_{n,m}.$$

Siendo $\delta_{n,m}$ la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Una característica que tienen los polinomios ortogonales es la fórmula de Rodrigues, que para el peso e^x nos permite definir a los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right). \tag{1}$$

Estudiaremos análogamente a los polinomios de Laguerre generalizados, que es natural ya que podemos definir los polinomios generalizados de Laguerre por la expresión

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right) \quad \text{para} \quad \alpha > -1. \tag{2}$$

Observemos que los polinomios de Laguerre se obtienen del generalizado con $\alpha = 0$.
Los polinomios de Laguerre L_n y Laguerre generalizados L_n^{α} cumplen las siguientes propiedades, para demostraciones y más detalles ver Szego (1939), Torres y cols. (2017), Shao y cols. (2016), Kim y cols. (2016), Aktaş y Erkuş-Duman (2013), Qi (2018).

- **Representación explícita**
  Los polinomios $L_n(x)$ son polinomios de grado n. Podemos escribir algunos términos en forma explícita

$$L_0 = 1, \quad L_1 = -x + 1, \quad L_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2),$$
$$L_n(x) = 1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\frac{-x^n}{n!}.$$

  En el caso de los polinomios generalizados de Laguerre, se tiene

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-x)^{\nu}}{\nu!},$$

  cuyos primeros téminos son

$$L_0^{\alpha}(x) = 1, \qquad L_1^{\alpha}(x) = -x + \alpha + 1, \qquad L_2^{\alpha}(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) - (2+\alpha)x + \frac{1}{2}x^2.$$

- **Función generatriz**
  En todos los polinomios ortogonales se puede definir una función generatriz $G(x,t)$, como desarrollo en serie de potencias t, que en el caso de los polinomios de Laguerre es dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n, \tag{3}$$

y en el caso de los polinomios generalizados de Laguerre la función generatriz

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{n!} t^n.$$

La función generatriz es usada usualmente como definición de los polinomios de Laguerre.

- **Fórmula de recurrencia**
  De la función generatriz $G(x,\, t)$ dada por (3), derivando con respecto a t y realizando unos ciertos cálculos, obtenemos la fórmula de recurrencia a tres términos

$$L_{n+1}(x) + L_n(x)(-2n-1+x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

  Para los polinomios generalizados de Laguerre, tenemos

$$nL_n^\alpha(x) = (-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n+\alpha-1)L_{n-2}^\alpha(x), \quad n = 2,3,4,\ldots$$

  La fórmula de recurrencia para la derivada es

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = x^{-1}\{nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)\}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

- **Ortogonalidad**
  El producto interno con el peso $w(x) = e^{-x}$ proporciona la ortogonalidad para los polinomios de Laguerre

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{n,m} \qquad n,m = 0,1,2,\ldots$$

  La ortogonalidad para los polinomios generalizados de Laguerre viene dada por

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)dx = \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} = \delta_{nm} \qquad n,m = 0,1,2,\ldots$$

  donde Γ es la función Gamma dada por $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

- **Ecuación de Laguerre**
  Los polinomios de Laguerre son soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \qquad y = L_n(x).$$

  Para la ecuación generalizada de Laguerre

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + \lambda y = 0, \qquad y = L_n^\alpha(x).$$

- **Kernel para los polinomios generalizados de Laguerre**
  La siguiente ecuación representa el núcleo de los polinomios generalizados de Laguerre

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1)K_n^\alpha &= \sum_{\nu=0}^{n} \left\{\binom{\nu+\alpha}{\nu}\right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x)L_\nu^\alpha(y) \\ &= (n+1)\left\{\binom{n+\alpha}{n}\right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(y)L_n^\alpha(x)}{x-y}.\end{aligned}$$

- **Serie hipergeométrica para los polinomios generalizados de Laguerre**
  La representación de los polinomios generalizados de Laguerre como serie hipergeométrica es:

$$L_n^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} . {}_1F_1(-n; \alpha+1; x), \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

  donde ${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{\epsilon\to 0} F\left(a, \frac{1}{\epsilon}; c; \epsilon x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{(c)_r r!} x^r$ es la función hipergeométrica confluente de Kummer.

3. POLINOMIOS DE LAGUERRE COMPLEJO

Utilizaremos la representación dada por Kazmin (1969) de la sucesión de Laguerre $\{(-1^n)n!L_n^{\alpha-n}(x)\} \quad \alpha > -1$:

$$(1-t)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\alpha-n}(x) t^n, \quad \alpha > -1. \tag{4}$$

Ya se ha obtenido la extensión de los polinomios de Laguerre para el caso del Análisis de Clifford, ver Cacao (2011); Malonek (2011). Vamos a construir los polinomios de Laguerre en el caso de una variable compleja a partir de la función generadora (4).

La función $\exp(w, z)$ se define para $x, y \in \mathbb{C}$

$$\exp(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k w^k.$$

Para definir los polinomios de Laguerre complejo usaremos la siguiente definición del polinomio de Laguerre

$$(1-w)^{\alpha} \exp(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k^{(\alpha-k)}(z) w^k. \tag{5}$$

La generalización del combinatorio lo definimos por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{si } n = m, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^+, n > 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}, \alpha \geq n > 0 \\ 0, & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}^+, 0 < \alpha < n. \end{cases}$$

Asi podemos escribir

$$(1-w)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} w^k.$$

Con esta notación, obtenemos la fórmula (5), la cual se puede expresar como series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} w^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} w^k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\alpha-n}(z) w^n, \quad \alpha > -1.$$

Realizamos el producto

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{n-k}\frac{1}{(n-k)!}z^{n-k}w^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}L_{n}^{\alpha-n}(z)w^{n}.$$

Igualando los coeficientes

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{n-k}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}=(-1)^{n}L_{n}^{\alpha-n}(z).$$

Obtenemos la fórmula que permite definir los polinomios de Laguerre complejo

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{z^{k}}{k!}=(-1)^{n}L_{n}^{\alpha-n}(z).$$

4. DESARROLLO EN SERIES DE FOURIER-LAGUERRE

En esta sección vamos a presentar los coeficientes de Fourier-Laguerre en el espacio para funciones $[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ tales que para todo $n\in\mathbb{N}$, $f(x)L_n(x)e^{-x}\in L^1([0,\infty))$ y como los polinomios de Laguerre es un sistema de funciones completo ya que cada función continua de cuadrado integrable puede ser aproximada por su desarrollo en series de Fourier-Laguerre. Presentaremos los resultados en este sentido.

El primer resultado que presentaremos es de Pollard (1946), para una familia de polinomios ortogonales en general.

Sea $F(x)$ una función creciente en (a,b), y sean $P_n(x)$ los polinomios ortonormales asociados. Entonces para $m,n=0,1,2,...$

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)dF(x)=\delta_{m,n},$$

donde a cada función $f(x)$, le corresponde una expansión formal:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum a_nP_n(x),\\ a_n &= \int_a^b f(x)P_n(x)F(x). \end{aligned}\tag{6}$$

Supongamos que $f(x)$ pertenece a L_F^p, el espacio de las funciones $F-medible$ tal que $\int_a^b|f|^pdF(x)$ existe como una integral de Lebesgue, entonces nos planteamos la siguiente interrogante ¿para que valores de p la serie (6) converge a $f(x)$ en el sentido:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{0}^{N}a_nP_n(x)\right|^p dF(x)=0?$$

En el lenguaje del análisis funcional: ¿para que valores de p los polinomios ortogonales asociados con $F(x)$ forman una base en L_F^p? Si $F'(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $-1 < x < 1, \lambda \neq 0$, entonces los polinomios asociados a $F(x)$ forman una base en $L_F^p(-1,1)$ si:

$$2 - \frac{1}{\lambda+1} < p < 2 + \frac{1}{\lambda}, \tag{7}$$

pero no si $1 \leq p < 2 - \frac{1}{\lambda+1} \quad o \quad p > 2 + \frac{1}{\lambda}$. Como observación del teorema se tiene:

(i) Si $\lambda = 0$ resulta el teorema de convergencia de series de Fourier por M. Riesz.

(ii) Si $\lambda = 1/2$ el teorema establece que los polinomios de Legendre forman una base para $L^p(-1,1)$ si $4/3 < p < 4$.

(iii) El caso $\lambda = \infty$ es interesante. Si x en $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ es reemplazado por $x\lambda^{-1/2}$ y se toma el límite cuando $\lambda \to \infty$, entonces les corresponden los polinomios de Hermite en (∞, ∞). La fórmula (7) sugiere que en estos polinomios la convergencia media existe sólo para $p = 2$. Éste y un resultado similar para polinomios de Laguerre son confirmados con contraejemplos adecuados. Lo anterior nos dice que los polinomios ortogonales de Laguerre sólo convergen en L^p cuando $p = 2$. Luego, el mismo Pollard complementa su trabajo previo con los detalles de la convergencia para polinomios de Hermite y para los de Laguerre se presentan unas sugerencias de la prueba pero no se muestra de manera formal, esto se puede observar en Pollard (1948).

La siguiente investigacion de convergencia del desarrollo en serie Fourier-Laguerre es gracias a Askey y Wainger (1965), quienes escriben lo siguiente:

Sea $L_n^\alpha, \alpha \geq 0$, definido por

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) r_n = (1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right),$$

donde

$$r_n = \{\Gamma(n+\alpha+1)/n!\}^{-\frac{1}{2}},$$

entonces definimos las funciones de Laguerre

$$\mathfrak{L}_n^\alpha(x) = x^{\alpha/2} r_n \exp(-x/2) L_n^\alpha(x)$$

son ortonormales en el espacio de Lebesgue $L^1(0,\infty)$ $(0,\infty)$.

Sea $L^p(0,\infty)$ el espacio de funciones medibles tal que $\|f\|_p = \left[\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$ es finita.

El teorema principal es el siguiente:

Sea $f(x)$ en $L^p(0,\infty)$, $\quad 4/3 < p < 4$. Se define

$$a_n = \int_0^\infty \mathfrak{L}_n^\alpha(x) f(x) dx$$

y el conjunto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{L}_k^\alpha(x).$$

Entonces

$$\|S_n - f\|_p \to 0, \quad cuando \quad n \to \infty.$$

Los resultados aqui se desarrollan primero probando en L^p la acotación uniforme de las sumas parciales, hasta llegar a la convergencia.

En las próximas investigaciones, Muckenhoupt (1970a) indica que en los polinomios de Laguerre, los términos no convergerán a 0 en la media si p no está entre $4/3$ y 4. Específicamente, probó los siguiente teoremas: Sea p un número fijo que satisface $1 \leq p \leq 4/3$ o $4 \leq p \leq \infty$, sea $\|\|_p$ la norma ordinaria en $(0, \infty)$, sea α mayor que -1, sea $w(x)$ finito en casi todas partes en $(0, \infty)$, sea $f(x)$ una función que tiene una serie de Laguerre para este α y satisface $\|w(x)f(x)\|_p < \infty$ y sea L_n^α el enésimo término de esa serie. Si existe una constante C, independiente de $f(x)$ tal que $\|a_n L_n^\alpha w(x)\|_p \leq C\|f(x)w(x)\|_p$ para todo $n \geq C$, entonces $w(x) = 0$ casi en cualquier parte. Sea p, $\|\|_p$, $w(x)$, $f(x)$, α y a_n como en el Teorema 4. Si $\lim_{n\to\infty} \|a_n L_n^\alpha w(x)\|_p = 0$ para cada función $f(x)$, entonces $w(x) = 0$ casi en cualquier parte. El siguiente es un corolario inmediato de la desigualdad de Minkowski. Sea p, $\|\|_p$, $w(x)$, $f(x)$, y α como en el Teorema 4 y sea S_n la enésima suma parcial de la serie de Laguerre. Si

$$\lim_{n\to\infty} \|[S_n - f(x)]w(x)\|_p = 0$$

para cada $f(x)$, entonces $w(x) = 0$ casi en cualquier parte. Las líneas anteriores evidencian la convergencia propuesta por el autor. Luego, Muckenhoupt (1970b) generaliza los resultados de Askey y Wainger (1965), para la convergencia media con $1 < p < \infty$. Los resultados mostrados mejoran en términos de las funciones de peso elegidas. Sin embargo, las conclusiones de Muckeoupt se basaron en desigualdades que requerían una función de ponderación mayor en el lado derecho que en el izquierdo. Los teoremas que propuso fueron: Sea $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $U(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}(x/(1+x))^\alpha(1+x)^b$ y $V(x) = (x/(1+x))^A(1+x)^B(1+\log^+ x)^B$ donde $B = 1$ si $b = B$ y p es $4/3$ o 4 y $\beta = 0$ caso contrario. Se asume que

$$\alpha > -1/p + \max\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4}\right), \qquad A < 1 - 1/p - \max\left(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4}\right) \qquad A \leq a,$$

$$\begin{aligned} & b < 3/4 - 1/p, \qquad 1 < p \leq 4, \\ & b \leq 7/12 - 1/3p, \qquad 4 < p < \infty, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & B \geq -\frac{1}{4} - 1/3p, \qquad 1 < p < 4/3, \\ & > \frac{1}{4} - 1/3p, \qquad 4/3 \leq p < \infty, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & b \leq B + \frac{1}{2} - 2/3p, \qquad 1 < p < 4/3, \\ & \leq B, \qquad 4/3 \leq p \leq 4, \\ & \leq B - 1/6 + 2/3p, \qquad 4 < p < \infty, \end{aligned} \tag{10}$$

y si ocurre la desigualdad (10), entonces no ocurre la desigualdad (8) o (9). Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n, tal que

$$\int_0^\infty |S_n^\alpha(f,x)U(x)|^p dx \leq C \int_0^\infty |f(x)V(x)|^p dx.$$

Sea $\alpha > -1$, y sea $U(x)$ y $V(x)$ con la forma usada en el Teorema 4 con $\beta = 0$. Se asume que $a \geq A$, $a > -1 \max(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4})$, $A \leq \min(\frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{4})$, $B \geq -7/12$ y $b \leq B - 1/6$. Entonces existe una constante

C independiente de $f(x)$ y n, tal que

$$\int_0^\infty |S_n^\alpha(f,x)U(x)|dx \leq C + C\int_0^\infty |f(x)|V(x)(1+\log^+|f(x)|+\log^+ x)dx.$$

Se asume que $\alpha > -1$, $4/3 < p < \infty$ y $o < \delta < 1$. Sea

$$U(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}(x/(1+x))^\alpha(1+x)^b$$

y para un n dado sea $\nu = 4n+2\alpha+2$ y o_n el conjunto de todos los x tal que $x > 0$ y $|x-\nu| > \lambda\nu$. Si $-1/p + \max(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4}) < \alpha < 1 - 1/p - \max(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4})$ y $-1/p + \frac{1}{4} < b < -1/p + \frac{3}{4}$, entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n, tal que

$$\int_0^\infty |S_n^\alpha(f,x)U(x)|^p dx \leq C\int_0^\infty |f(x)U(x)|^p dx.$$

Se asume que $\alpha > -1$, $1 < p < 4$, $0 < \delta < 1$, $U(x)$ y O_n son como en el Teorema 4 con las mismas condiciones de a y b. Sea $f_n(x) = f(x)$ en O_n y sea 0 fuera de O_n. Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n, tal que

$$\int_0^\infty |S_n^\alpha(f,x)U(x)|^p dx \leq C\int_0^\infty |f(x)U(x)|^p dx.$$

Se asume que $\alpha > -1$, $0 < \delta < 1$, $U(x)$ y O_n son como en el Teorema 4, $-1 + \max(-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{4}) < a \leq \min(\frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{4})$. Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n, tal que

$$\int_0^\infty |S_n^\alpha(f_n,x)U(x)|dx \leq C + C\int_0^\infty |f(x)|U(x)(1+\log^+|f(x)|+\log^+ x)dx.$$

Si las hipótesis de uno de los Teoremas del 4 al 8 son satisfechas y la integral del lado derecho del Teorema anterior es finita, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [|S_n^\alpha(x) - f(x)|U(x)]^p dx = 0,$$

donde E es el conjunto de integración considerado en el Teorema 8 , S_n es la suma parcial considerada y p es tomada como en uno de los casos de los Teoremas del 5 al 8. Con la presentación de estos Teoremas, se cumple la convergencia.

Continuando con el estudio de la convergencia, se tiene el realizado por Poiani, Eileen L (1972), su artículo se enfoca en probar inecuaciones de la forma $\|\sigma_n(f,x)W(x)\|_p \leq \|f(x)W(x)\|_p$ donde σ_n es la enésima $(C,1)$ convergencia de la serie de Laguerre de f, $W(x)$ la funcion peso de una forma particular y la norma L^p es tomada sobre $(0,\infty)$. Los resultados medios de sumabilidad de Cesaro se obtienen mediante el uso de los teoremas de densidad apropiados. Las conclusiones a las que se llega en este trabajo tienen la ventaja de necesitar solo una función de peso (Muckenhoupt usa dos pesos). Su estudio se basa en lo siguiente Se asume que $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$,

$$W(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}(x/(1+x))^\alpha(1+x)^b,$$

y

$$-\frac{1}{p} - \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}) < a < 1 - \frac{1}{p} + \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4});$$

$$\begin{aligned} b &\leq -\frac{1}{p} + \frac{7}{4} \qquad si \qquad 1 \leq p \leq 4, \\ b &\leq -\frac{1}{3p} + \frac{19}{12} \qquad si \qquad 4 < p \leq \infty; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} b &\geq -\frac{1}{3p} - \frac{5}{4} \qquad si \qquad 1 \leq p < \frac{4}{3}, \\ b &\geq -\frac{1}{p} - \frac{3}{4} \qquad si \qquad \frac{4}{3} \leq p \leq \infty; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a + b &\leq -\frac{2}{p} + \frac{5}{2} \qquad si \qquad 1 \leq p \leq 4, \\ a + b &\leq -\frac{4}{3p} + \frac{7}{3} \qquad si \qquad 4 \leq p \leq \infty; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} a + b &\geq -\frac{4}{3p} - 1 \qquad si \qquad 1 \leq p\frac{4}{3}, \\ a + b &\geq -\frac{2}{p} - \frac{1}{2} \qquad si \qquad \frac{4}{3} \leq p \leq \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

La igualdad no puede ocurrir en las primeras partes de (11) y (13) si $p = 4$ o $a = 3/4 - 1/p$ a no ser que $p = 1$. La igualdad no puede ocurrir en las segundas partes de (12) y (14) si $p = 4/3$ o $a = 1/4 - 1/p$ a menos que $p = \infty$. Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n tal que

$$\|\sigma_n(f, x)W(x)\|_p \leq \|f(x)W(x)\|_p,$$

donde

$$\sigma_n(f, x) = \int_0^\infty k_{n,1}(x, y)e^{-y}y^\alpha f(y)dy \tag{15}$$

y $\|\|_p$ denota la norma usual en $(0, \infty)$. Si $p = \infty$, se sigue la convención de norma habitual. La expresión para $p = \infty$ será ligeramente diferente de los de p finito que se presentan aquí, pero siguen procedimientos similares.

Tomar $a = b$ en la función de ponderación del Teorema 4 conduce directamente al siguiente corolario. Se asume que $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1$, $W(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}x^r$,

$$-\frac{1}{p} - \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}) < r < 1 - \frac{1}{p} + \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4}),$$

y $-2/3p - 1/2 \leq r \leq -2/3p + 7/6$. Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ y n tal que

$$\|\sigma_n(f, x)W(x)\|_p \leq \|f(x)W(x)\|_p,$$

donde $\sigma_n(f, x)$ está definida como en (15) y $\|\|_p$ denota la norma usual en $(0, \infty)$. Si las hipótesis del Teorema 4 son satisfechas, $p < \infty$, y $f(x)W(x) \in L^p(0, \infty)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (|\sigma_n(f, x) - f(x)|W(x))^p dx = 0,$$

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

y la convergencia estaria dada.

Siguiendo el estudio de la convergencia de los polinomios de Laguerre, se encuentra la investigación realizada por Riera (1989), quien estudia dicha convergencia con deltas de Dirac, en este caso para Laguerre con una delta en el cero.
En su estudio define: para α un número real mayor que -1, $w(x) = e^{-x}x^{\alpha} \quad \forall x > 0$ y $d\mu(x) = w(x)$ sobre $[0, \infty)$. Aqui los polinomios se definen como L_n^{α} ortogonales con respecto a la medida $d\mu$, con $L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Estos polinomios no están normalizados sino que

$$\|L_n^{\alpha}\|^2_{L^2 d\mu} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

En resumen, se estudió la convergencia en media para la medida $d\nu = e^{-x}x^{\alpha}dx + M\delta_0(x)$ en $[0, \infty)$. Las notaciones que se siguen en este estudio son, $L_n(x, y)$ para los núcleos relativos a $d\nu$. $L_n^{\alpha}(x)$ indica el polinomio de Laguerre de grado n, $P_n^{\alpha}(x)$ es el polinomio de L_n^{α} normalizado y $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x) = P_n^{\alpha}(x)w^{1/2} = P_n^{\alpha}(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}$.
Lo que se hace para hallar la convergencia es encontrar cotas para la norma de los núcleos $L_n(x, 0)$ relativos a $d\nu$. Esto es posible gracias a que los $L_n(x, 0)$ es, salvo un factor constante igual a $P_n^{\alpha+1}(x)$ Con la notación anterior se tiene

$$L_n(x, 0) = r_n P_n^{\alpha+1}(x), \quad donde \quad r_n \sim n^{-(\alpha+1)/2}.$$

Sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea v definida como

$$v(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{x}{x+1}\right)^A (1+x)^B (1 + \log^+ x)^{\beta} \quad \forall x > 0, \tag{16}$$

donde $\beta = 0$ ó 1. Si se verifican las condiciones

$$A < 1 - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{2},$$
$$B > \frac{1}{4} - \frac{1}{p}$$

y

$$B \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{3p},$$

entonces existe $C > 0$ tal que $\|L_n(x, 0)\|_{L^q(v^{-q}w)} \leq C \quad \forall n.$ Para la norma $\|L_n(x, 0)\|_{L^p(u^p w)}$ se tiene el resultado análogo Sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sea u definida como

$$u(x) = w(x)^{1/2-1/p} \left(\frac{x}{x+1}\right)^a (1+x)^b \quad \forall x > 0; \tag{17}$$

si se verifican las condiciones

$$a > 1 - \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2},$$
$$b < \frac{3}{4} - \frac{1}{p}$$

y

$$b \leq \frac{7}{12} - \frac{1}{3p},$$

entonces existe $C > 0$ tal que $\|L_n(x,0)\|_{L^p(u^p w)} \leq C \quad \forall n$. Una vez estudiadas las normas de los núcleos, se analiza la convergencia de la serie de Fourier relativa a $d\nu(x) = d\mu(x) + M\delta_0(x)$. En este estudio sirven también para la acotación de la serie de Fourier con respecto a $d\nu$ las mismas acotaciones que utiliza Muckenhoupt (1970b), donde resulta lo siguiente Sea S_n la suma parcial enésima de la serie de Fourier de los polinomios ortonormales relativos a $d\nu(x) = w(x)dx + M\delta_0(x)$ sobre $[0,\infty)$, $w(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha > -1$. Sean $1 < p < \infty$ y u y v de la forma (17) y (16) respectivamente, con $0 < u(0) < +\infty$, $0 < v(0) < +\infty$. Si se cumplen las condiciones (4) - (10) tal como en el Teorema 4 por Muckenhoupt, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|uS_n f\|_{L^p(d\nu)} \leq C\|vf\|_{L^p(d\nu)} \quad \forall f, \quad \forall n.$$

Aquí concluye su investigación acerca de la convergencia.

5. CONCLUSIONES

Una vez realizada la investigación, se tienen las siguientes conclusiones:

1. Los polinomios de Laguerre cumplen con las propiedades que tienen los polinomios ortogonales en general, siendo la función peso e^{-x} para los polinomios y $e^{-x}x^{\alpha}$ para los polinomios generalizados de Laguerre.

2. Como motivación al estudio de los polinomios de Laguerre, es que ellos son soluciones de la ecuación $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$, cuya importancia es su intervención en el estudio de la mecánica cuántica, el oscilador cuántico, el equilibrio electrostático, entre otros.

3. Se presenta una definición que extiende a los polinomios de Laguerre al plano complejo, $L_k^{(\alpha-k)}(z)$.

4. La convergencia de los polinomios de Laguerre ha sido posible mediante la descomposición de su núcleo o Kernel, donde en cada caso han sido elegidas las estimaciones adecuadas por cada auto

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener ningún conflicto de interés.

7. REFERENCIAS

Aktaş, R., y Erkuş-Duman, E. (2013). The laguerre polynomials in several variables. *Mathematica Slovaca*, *63*(3), 531–544.

Ali, A. (2021). A generalization of the laguerre polynomials. *Communications of the Korean Mathematical Society*, *36*(2), 299–312.

Aloui, B., y Khériji, L. (2019). Connection formulas and representations of laguerre polynomials in terms of the action of linear differential operators. *Проблемы анализа*, *8*(3), 24–37.

Askey, R., y Wainger, S. (1965). Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series. *American Journal of Mathematics*, *87*(3), 695–708. doi: 10.2307/2373069

Cacao, M., I. Falcao. (2011). Laguerre deivative ang monogenic laguerre polynomials. *An Operational Approach Math Comput, Modelling 53*.

Gadzhimirzaev, R. M. (2020). Integral estimates for laguerre polynomials with exponential weight function. *Russian Mathematics*, *64*(4), 12–20.

Kazmin, Y. A. (1969). On appell polynomials. *Mat. Zametki*.

Kim, T., San Kim, D., Hwang, K.-W., y Seo, J. J. (2016). Some identities of Laguerre polynomials arising from differential equations. *Advances in Difference Equations*, *2016*(1), 1–9. doi: 10.1186/s13662-016-0896-1

Malonek, G., H.R. Tomaz. (2011). Laguerre polynomials in several hypercomplex variables and their matrix representation. *Computational Science and its Applications*.

Muckenhoupt, B. (1970a). Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, *147*(2), 419–431. doi: 10.2307/1995204

Muckenhoupt, B. (1970b). Mean convergence of hermite and laguerre series. ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, *147*(2), 433–460. doi: 10.2307/1995205

Poiani, Eileen L. (1972). Mean Cesaro summability of Laguerre and Hermite series. *Transactions of the American Mathematical Society*, *173*, 1–31. doi: 10.1090/S0002-9947-1972-0310537-9

Pollard, H. (1946). The mean convergence of orthogonal series of polynomials. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *32*(1), 8. doi: 10.1073/pnas.32.1.8

Pollard, H. (1948). The mean convergence of orthogonal series. ii. *Transactions of the American mathematical society*, *63*(2), 355–367. Descargado de `https://www.ams.org/journals/tran/1948-063-02/S0002-9947-1948-0023941-X/S0002-9947-1948-0023941-X.pdf`

Qi, F. (2018). Simplifying coefficients in a family of ordinary differential equations related to the generating function of the laguerre polynomials. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, *13*(2), 9.

Riahifar, A., y Matinfar, M. (2018). Application of laguerre polynomials for solving infinite boundary integro-differential equations. *International Journal of Industrial Mathematics*, *10*(2), 143–149.

Riera, M. P. (1989). *Series de Fourier respecto de sistemas ortogonales : estudio de la convergencia en espacios de Lebesgue y de Lorentz* (Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza). Descargado de `http://anamat.unizar.es/mperez/preprints/tesisMPerez.pdf`

Shao, W. K., He, Y., y Pan, J. (2016). Some identities for the generalized Laguerre polynomials. *J. Nonlinear Sci. Appl*, *9*(5), 3388–3396. doi: 10.22436/JNSA.009.05.124

Szego, G. (1939). *Orthogonal polynomials* (Vol. 23). American Mathematical Soc.

Torres, A. V., y cols. (2017). *Polinomios ortogonales confluentes matriciales* (Tesis de Master, Universidad Nacional de Cuyo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales). Descargado de https://tesisfcp.bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/14017/tesis-torres-2017-1.pdf

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	**Contribución**
Elvin Loor Bermeo	redacción, recolección de información, metodología, resultados.
Adrián Infante Linares	corrección, redacción, resultados.