



Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 201-212). Edición continua

<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index>

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec

Universidad Técnica de Manabí

DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5112>

SOBRE EL ANILLO DEL ESPACIO DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUA

Ingrid María Vera Mendieta¹  Ramón Adrián Infante Linarez² 

¹ Instituto de Posgrado. Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Técnica de Manabí. Ecuador. Correo electrónico: ivera9240@utm.edu.ec

² Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Técnica de Manabí. Ecuador. Correo electrónico: adrian.infante@utm.edu.ec

*Autor para la correspondencia: ivera9240@utm.edu.ec

Recibido: 24-08-2022 / Aceptado: 13-12-2022 / Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas Espinoza 

RESUMEN

Es bien conocido que el producto puntual de dos funciones uniformemente continua no necesariamente es uniformemente continua. En este artículo se hace una revisión sobre los trabajos que estudian las funciones uniformemente continuas y las características para que una función continua sobre un espacio siempre sea uniformemente continua y su producto puntual sea uniformemente continuo. En la revisión se pudo verificar condiciones suficientes para que un espacio uniforme sea uniformemente continuo. Además, se incluirá las demostraciones de resultados más importante unificando la notación entre un artículo y otro.

Palabras clave: Anillos, Continuidad, Continuidad Uniforme, Espacio, Funciones.

ON THE RING OF THE SPACE OF UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS

ABSTRACT

It is well known that the dot product of two uniformly continuous functions is not necessarily uniformly continuous. In this article a review is made on the works that study the uniformly continuous functions and the characteristics so that a continuous function on a space is always uniformly continuous and its dot product is uniformly continuous. In the review it was possible to verify sufficient conditions for a uniform space to be uniformly continuous. In addition, the most important demonstrations of results will be included, unifying the notation between one article and another.

Keywords: Rings, Continuity, Uniform Continuity, Space, Functions.





NO ANEL DO ESPAÇO DAS FUNÇÕES UNIFORMEMENTE CONTÍNUAS

RESUMO

É bem conhecido que o produto pontilhado de duas funções uniformemente contínuas não é necessariamente uniformemente contínuo. Neste artigo é feita uma revisão dos trabalhos que estudam funções uniformemente contínuas e características para que uma função contínua num espaço seja sempre uniformemente contínua e que o seu produto ponto seja uniformemente contínuo. Na revisão foi possível verificar condições suficientes para que um espaço uniforme fosse uniformemente contínuo. Além disso, serão incluídas as provas de resultados mais importantes, unificando a notação entre um artigo e outro.

Palavras chave: Anéis, Continuidade, Continuidade Uniforme, Espaço, Funções.

Citación sugerida: Vera, I., Infante, A. (2022). SOBRE EL ANILLO DEL ESPACIO DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUA. Revista Bases de la Ciencia, 7 (No Especial), Diciembre, 201-212. DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5112>



1. INTRODUCCIÓN

El estudio del álgebra de las funciones uniformemente continua ha tenido especial atención desde mediados del siglo pasado hasta los últimos años como podemos ver en (Atsuji, 1958), (Elyash, Laush, & Levine, 1960), (Levine & Saber., 1965), (Sam B Nadler, 2007), (Saber, 2018) (Katrina Gensterblum, 2018). Se sabe que el producto de dos funciones continuas de valor real es una función continua, sin embargo, el producto de dos funciones uniformemente continuas con valores reales no es necesariamente uniformemente continua, como por ejemplo la función identidad multiplicada consigo misma, si bien la función x es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, la función x^2 no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Otro ejemplo, las funciones x y $\sin x$ en $\mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas cuyo producto no lo es. El problema de encontrar condiciones para que el producto de dos funciones uniformemente continua sea uniformemente continuo ha sido estudiado caracterizando a las funciones, o el dominio o la métrica que define la continuidad. En (S & Ziney., 2007) los autores caracterizan los dominios de la recta real en los que el producto puntual de dos funciones uniformemente continuas es una función uniformemente continua y demuestra que estas funciones forman un anillo.

En los trabajos de Elyash, G. Laush, and N. Levine (1960) y N. Levine and N. J. Saber (1965) se dan condiciones necesarias para que funciones uniformemente continuas a valores reales el producto punto de tales funciones sea uniformemente continua. Nadler y Zitney (2016) aprovechando la caracterización de espacios uniformemente continuos en términos de conjuntos compactos y uniformemente aislados, dada por N. Levine (1955) consiguen una caracterización para aquellos subconjuntos D de la recta real en los que el conjunto de las funciones a valores reales, con dominio D y que son uniformemente continuas forman un anillo (con las operaciones de multiplicación y suma puntual). Tal caracterización exige que D sea la unión de conjuntos acotados y presente la condición de uniformemente aislado.

La idea es conseguir características y caracterizaciones que no se tienen hasta el momento para el espacio uniforme. Una caracterización que se da es: Si (X, U) es un espacio uniforme precompacto, entonces la familia de todas las funciones uniformemente continua sobre X es un álgebra.

Otra caracterización es que Si (X, d) es un espacio métrico y (X, U) es el correspondiente espacio uniforme definido con la métrica d , entonces $A \subset X$ es uniformemente aislado en (X, d) sí, y solo si, A es un conjunto uniformemente aislado en el espacio uniforme (X, U) . Por último, que si X un

espacio de funciones continua. Si K es un conjunto compacto tal que $X - K$ es uniformemente aislado, entonces X es un espacio uniformemente continuo.

Pero queda la inquietud de saber si el espacio de las funciones uniformemente continuas sobre un espacio uniforme genera un algebra o no, y si se cumplen condiciones como que en lugar de que las funciones sean uniformemente continuas sea precompacto; y es ahí donde nace la necesidad de buscar respuestas positivas a esas hipótesis y forma parte de los resultados del presente trabajo.

2. Funciones Uniformemente Continuas sobre la Recta Real

A lo largo del trabajo presentaremos definiciones que nos muestra las técnicas usadas por los diferentes autores, así como el contexto en que se estudia el problema del producto de las funciones uniformemente continua.

Definición 2.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que A es uniformemente continuo si toda función a valores reales con dominio A es uniformemente continua.

Definición 2.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto aislado si existe un número real $r > 0$ tal que $|x - y| > r$, para todo par de puntos diferentes $x, y \in A$.

Teorema 2.3. Si A es uniformemente aislado y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces f es uniformemente continua.

En (S & Ziney., 2007) presentan el siguiente resultado.

Teorema 2.4. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces el producto puntual de cualquier par de funciones uniformemente continua de X en $\mathbb{R}$ es uniformemente continuo si, y sólo si, X es la unión de un conjunto acotado con un conjunto uniformemente aislado.

Una consecuencia del teorema 1.4 lo encontramos en el siguiente corolario:

Corolario 2.5. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces el producto puntual de un par de funciones uniformemente continuas de X en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua sí, y sólo si, la clausura de X es un conjunto uniformemente continuo.

3. Funciones Uniformemente Continuas en espacios métricos

En (Levine & Saunders, 1965) caracteriza las clases (K^*) de funciones uniformemente continuas. Una función de valor real uniformemente continua pertenecerá a la clase K^* sí, y solo si, la aplicación

de productos múltiples de esta función con cualesquiera n funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Para presentar estos resultados necesitamos de las siguientes definiciones:

Definición 3.1. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subset M$. Diremos que A está acotado si existe una bola $B(x, r)$ en M que contiene a A .

Diremos que A está totalmente acotado si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de bolas, de radio ε y que cubren a A .

Definición 3.2. Sea (M, d) un espacio métrico. Diremos que (M, d) tiene la propiedad **B** sí, y sólo si, todo subconjunto acotado de M es totalmente acotado.

Un ejemplo es $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual, todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ es totalmente acotado y tiene la propiedad **B**. Si cambiamos la métrica por $d_A(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_A)$ no tiene la propiedad **B**.

Lema 3.3. Sea (M, d) un espacio métrico con la propiedad **B**. Si $A \subset M$ es acotado, entonces el producto de dos funciones a valores reales uniformemente continua sobre A es uniformemente continua sobre A .

Definición 3.4. Sea (M, d) un espacio métrico y L un subconjunto de la recta, junto con la métrica usual, denotada por $[1, \infty)$. Sea $K(M)$ la clase de las funciones

$$\{f: M \rightarrow L : f \text{ es uniformemente continua}\}$$

Definición 3.5. Sea (M, d) un espacio métrico, $K^*(M)$ es definido la clase de las las funciones uniformemente continua $f: M \rightarrow L$ tal que si $h \in K(M)$ entonces $h \cdot f \in K(M)$.

Observemos que $K^*(M)$ es un subconjunto propio de $K(M)$, ya que si $f: L \rightarrow L$ es la identidad $x \in K(L)$ pero $x^2 \notin K^*(L)$.

Teorema 3.6. Si $f \in K(L)$, entonces $f \in K^*(L)$ si y sólo si $xf \in K(L)$.

En (Levine & Saunders, 1965) se investiga sobre los conjuntos, cada uno de los cuales tiene la propiedad de que cada función continua desde el conjunto hasta M_1 es uniformemente continuo en el conjunto, donde (M_1, d_1) es un espacio métrico dado

Definición 3.7. Sean (M, d) y (M_1, d_1) espacios métricos. Entonces se dice que un subconjunto E de M es U.C. (M_1) sí, y sólo si, toda función de E a M_1 que es continua en E es uniformemente continua en E .

Definición. 3.8. Sean (M, d) un espacio métrico y E un subconjunto de M . Entonces se dice E es U.I. (uniformemente aislado) si y sólo si existe un número real $\eta > 0$ tal que $d(p, q) \geq \eta$ para todo $p \neq q$ en E .

Teorema 3.9. Sean (M, d) y (M_1, d_1) espacios métricos y E un subconjunto de M . Entonces una condición suficiente para que E sea U.C. (M_1) es que $E = E_1 \cup E_2$, donde E_1 es compacto y E_2 es U.I. ver (Gerald Beer, Sandro Levi, 2009).

Dándole continuidad a estos resultados (Katrina Gensterblum, 2018) describen las condiciones suficientes y necesarias para tales conjuntos en la categoría de espacios métricos.

Definición 3.10. Se dice que un espacio métrico (M, d) es uniformemente continuo si toda función continua de valor real en M es uniformemente continua. Más generalmente, se dice que (M, d) es uniformemente continua con respecto a un espacio métrico (M_1, d_1) si toda función continua de M a M_1 es uniformemente continua.

Definición 3.11. Se dice que un espacio métrico (M, d) es universalmente uniformemente continuo si es uniformemente continuo con respecto a todo espacio métrico.

Teorema 3.12. Sea (M, d) un espacio de M . Entonces (M, d) es uniformemente continuo si y sólo si el conjunto derivado $(\text{der}(M))$ es compacto, y para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $M \setminus B(\text{der}(M), \varepsilon)$ es uniformemente aislado.

El conjunto $\text{der}(M)$ se define como el conjunto de todos los puntos límite de (M, d) . El conjunto $B(\text{der}(M), \varepsilon)$ es el conjunto de todos los puntos a una distancia máxima ε de $\text{der}(M)$; equivalentemente tomamos

$$B(\text{der}(M), \varepsilon) = \bigcup_{x \in \text{der}(M)} B(x, \varepsilon)$$

4. Funciones uniformemente continuas y espacios uniformes

Comenzamos recopilando las definiciones y propiedades para que permitan presentar un estudio del problema que es nuestro interés: dar condiciones cuando el producto de funciones uniformemente

continua sea uniformemente continuo. Además, se demostrará los resultados sobre los espacios uniforme que buscan dar condiciones sobre los conjuntos donde definimos las funciones y que poseen la propiedad deseada. Son conocidos algunos resultados en ese sentido, por ejemplo, se sabe que toda función con valores en $\mathbb{R}$, definida sobre un compacto K de la recta es uniformemente continua y el producto de estas funciones es uniformemente continuo sobre K .

Se realizarán algunas definiciones y resultados que van en este sentido, ver (S.M. Padhye, & S.B. Tadam, K. 2015 y S.B. Tadam & S.M. Padhye, 2017).

Definición 4.1 Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ una familia no vacía de subconjuntos del producto cartesiano $X \times X$. Diremos que $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme si satisface

1. Si $U \in \mathcal{U}$ entonces $\Delta_X \subset U$, donde $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ es la diagonal en $X \times X$.
2. Si $U \in \mathcal{U}$ entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$, donde $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\}$.
3. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $V \subset X \times X$. Si $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{U}$.
4. Si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.
5. Si $U \in \mathcal{U}$ entonces existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que cuando $(x, y) \in U$ y $(y, z) \in V$ se cumple $(x, z) \in U$.

Notación. Sean $U, V \in \mathcal{U}$. Si $(x, y) \in U$ y $(x, z) \in V$ entonces escribimos $(z, y) \in V \circ U$.

Definición 4.2 Dado un punto $x \in X$ denotaremos por $U[x]$ al conjunto $\{y : (x, y) \in U\} = pr_2(U \cap (\{x\} \times X))$, donde $U \cap (\{x\} \times X)$ es la sección transversal vertical de U y pr_2 es la proyección sobre la segunda coordenada.

Definición 4.3 Un sistema fundamental de vecindades en $\mathcal{U}$, es cualquier conjunto B de vecindades en $\mathcal{U}$ tal que para cada vecindad V_ω de $\omega \in \mathcal{U}$, existe U_ω un conjunto que pertenece a B tal que $\omega \in U_\omega \subset V_\omega$.

En particular, si (X, d) es un espacio métrico y $U^\epsilon = \{(x, y) : d(x, y) \leq \epsilon\}$, forman un sistema fundamental de vecindades para la estructura uniforme estándar de X . De manera que si (X, d) es un espacio métrico y $(X, \mathcal{U})$ es un espacio continuo relativo a d , tenemos que $U^\epsilon \in \mathcal{U}$.

Definición 4.4 Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un subconjunto A de X es uniformemente aislado si $(A \times A)^c \cup \Delta \in \mathcal{U}$.

Definición 4.5 Sea $UC(X)$ la familia de todas las funciones uniformemente continua de X sobre $\mathbb{R}$.

Definición 4.6 Sean (M_1, d_2) y (M_2, d_2) dos espacios métricos. Un subconjunto E de M_1 diremos que es Uniformemente Continuo si y sólo si toda función continua de E sobre M_2 es uniformemente continua en E .

Definición 4.7 Un conjunto X es un espacio uniformemente continuo si toda función continua sobre X es uniformemente continua sobre X .

Si f es una función continua sobre un conjunto X y U es la familia de los subconjuntos del producto cartesiano $X \times X$, es decir (X, U) un espacio uniforme, podemos ver que son condiciones suficiente para que f sea uniformemente continua sobre X . Estudiemos este hecho en detalle, para así relacionar función continua, espacio continuo y función uniformemente continuo.

Se sabe que f es continua sobre X respecto al espacio uniforme (X, U) si dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, existe $U_x \in U$, un entorno de x , tal que si $y \in U_x[x]$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Como la familia de todos los conjuntos simétricos abiertos de U , forman una base para U , tenemos que existe $V_x \subset U$ tal que $V_x[x]$ es un subconjunto abierto simétrico de X tal que $V_x \circ V_x \subset U_x$. Así que, para todo $z \in X$, $V_x[z]$ es abierto en X . En particular, $V_x[x]$ es abierto en X y por tanto $V_x \circ V_x \subset U_x$. Vamos a considerar un conjunto compacto para eliminar la dependencia de x de los conjuntos donde tenemos la condición de continuidad.

Si K es compacto en X , entonces $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x[x]$. Así que existen $x_1, x_2, \dots, x_n$ en K tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}[x_i]$.

Sean $W = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in U$ y $W_1 = W \cap V \in U$.

Sea $(x, y) \in W_1$ y por lo tanto $(x, y) \in V = [(X - K) \times (X - K)^c] \cup \Delta$.

Tenemos que $(x, y) \notin [(X - K) \times (X - K)]$, es decir que $x \notin (X - K)$ ó $y \notin X - K$ y por lo tanto $x \in K$ ó $y \in K$.

Si $x \in K \subset \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}[x_i]$, entonces $x \in V_{x_j}$ para algún j , $1 \leq j \leq n$. Así que $(x, x_j) \in V_{x_j}$.

Si $(x, y) \in W = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, entonces $(x, y) \in V_{x_i}, \forall i = 1, \dots, n$. En particular, $(x, y) \in V_{x_j}$.

Así que $(x_j, y) \in V_{x_j} \circ V_{x_j} \subset U_{x_j}$ y por lo tanto $|f(x) - f(x_j)| < \epsilon/2$. En resumen,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Similarmente si $y \in K$. Concluimos que f es uniformemente continua y demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.8 Sea (X, U) un espacio uniforme. Si f es una función continua sobre X , entonces f es uniformemente continua.

Cuando (X, U) es un espacio uniformemente continuo obtenemos que la familia de todas las funciones uniformemente continua sobre X ($UC(X)$), es un álgebra. Primero observando que $UC(X)$ es un espacio vectorial complejo.

Teorema 4.9 Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea (X, U) un espacio uniforme. Entonces para todas funciones $f, g \in UC(X)$ se tiene:

1. $f \pm g$ es uniformemente continua.
2. αf es uniformemente continua, para todo escalar α .
3. $|f|$ es uniformemente continua.

Los detalles de este resultado, que demuestra que $UC(X)$ es un espacio vectorial complejo, se puede conseguir en (Tadam y Padhye2017).

Del teorema 3.10, se deduce que $UC(X)$ es cerrado para la suma y para la multiplicación por un escalar. Además, $UC(X)$ es cerrado para el producto, si consideramos dos funciones $f, g \in UC(X)$, es decir que f, g son funciones uniformemente continuas sobre X y por tanto la función producto, fg , es continua sobre X . Al ser X un espacio uniformemente continuo, tenemos que $fg \in UC(X)$. Así que, $UC(X)$ es un álgebra. Este resultado lo presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 4.10 Si (X, U) es un espacio uniformemente continuo, entonces $UC(X)$ es un álgebra.

Definición 4.11 Si (X, U) es un espacio uniforme, diremos que un conjunto $A \subset X$ es un conjunto precompacto en X , o relativamente compacto, si existe una familia finita de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, tal que $A = U[x_1] \cup \dots \cup U[x_n]$.

Lema 4.12 Si $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ una función uniformemente continua entonces, f envía conjuntos precompactos en conjuntos precompactos.

Teorema 4.13 Si (X, U) es un espacio uniforme precompacto, entonces $UC(X)$ es un álgebra.

Teorema 4.14 Si (X, d) es un espacio métrico y (X, U) es el correspondiente espacio uniforme definido con la métrica d entonces, $A \subset X$ es uniformemente aislado en (X, d) sí, y solo si, A es un conjunto uniformemente aislado en el espacio uniforme (X, U) .

Para entender la importancia y la naturaleza de los conjuntos uniformemente aislado, se realiza la demostración de este teorema 3.15, para más detalles ver (Tadam y Padhye2017).

Demostración del teorema 4.14. Sea $A \subset X$ un conjunto uniformemente aislado en un espacio métrico (X, d) . Así que existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $x, y \in A$, $d(x, y) \geq \varepsilon$, es decir que para cualquier $(x, y) \in A \times A - \Delta_X$, satisface que $d(x, y) \geq \varepsilon$ y por lo tanto

$$A \times A - \Delta_X \subset \{(x, y): d(x, y) \geq \varepsilon\}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \{(x, y): d(x, y) \geq \varepsilon\}^c &\subset (A \times A - \Delta_X)^c \\ &= ((A \times A) \cap \Delta^c)^c \\ &= (A \times A)^c \cup \Delta. \end{aligned}$$

Es decir

$$\{(x, y): d(x, y) \leq \varepsilon\} \subset (A \times A)^c \cup \Delta.$$

Como $\{(x, y): d(x, y) \leq \varepsilon\} \in U$ siendo un sistema fundamental de vecindades para U tenemos que $(A \times A)^c \cup \Delta \in U$. Es decir que A es un conjunto uniformemente aislado de (X, U) .

En el otro sentido, sea A un conjunto uniformemente aislado de (X, U) . Es decir,

$$(A \times A)^c \cup \Delta \in U.$$

Así que $(A \times A)^c \cup \Delta$ es unión de elementos del sistema fundamental de vecindades $U_\varepsilon = \{(x, y): d(x, y) \leq \varepsilon\}$ y es un subconjunto propio de U_ε , es decir que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\{(x, y): d(x, y) \leq \varepsilon_0\} \subset ((A \times A)^c \cup \Delta)^c.$$

Así que $(A \times A)^c \cup \Delta \subset \{(x, y): d(x, y) > \varepsilon_0\}$. Por lo tanto, para todo $x, y \in A$, $x \neq y$, cumple que $d(x, y) > \varepsilon_0$ lo que prueba que A es un subconjunto aislado de (X, d) . ■

Teorema 4.15 Sea (X, U) un espacio uniforme cualquiera. Si K es un conjunto compacto tal que $X - K$ es uniformemente aislado entonces, X es un espacio uniformemente continuo.

Si A es un conjunto compacto, aplicando el teorema 3.15 y obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.16 Sea (X, U) un espacio uniforme y $A =$ conjunto de todos los puntos límite de X . Suponga que A es compacto y $X - A$ es uniformemente aislado, entonces X es un espacio uniformemente continuo.

Observación 4.17 El inverso de este teorema es falso. Como se deduce de siguiente contraejemplo. (S.M.Padhye, & S.B.Tadam, K. 2015).

Sea $X = [-1, 0] \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Note que

$$X = [-1, 0] \cup \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \{2, 3, 4, \dots\}$$

entonces,

- i) X es un espacio uniformemente continuo.
- ii) $A = [-1, 0]$ es compacto.
- iii) $X - A$ no está uniformemente aislado.

Solución. i) Tome $K = [-1, 0] \cup X = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$. Entonces K es cerrado y acotado y por tanto, compacto. Usando compacidad y usando el hecho que para todo $x, y \in X - K$ con $x \neq y$ se tiene que $d(x, y) \geq 1$ se concluye que, $X - K$ esta uniformemente aislado y por el teorema 3.16, X es un espacio uniformemente continuo.

ii) Dado que el conjunto de todos los puntos límite de X es igual a $A = [-1, 0]$. Además, A es compacto.

iii) Ahora $X - A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \{2, 3, 4, \dots\}$. En $X - A$ obtenemos una secuencia $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ tal que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, cuándo $n \rightarrow \infty$, esto implica que, no existe $\delta > 0$ tal que

$$x \neq y \Rightarrow d(x, y) > \delta,$$

lo que prueba que $X - A$ no está uniformemente aislado.

5. CONCLUSIONES

Mediante este estudio se determinó que es posible dotar a un espacio con una estructura topológica adecuada para que toda función continua sea uniformemente continua, y además que el espacio de todas las funciones uniformemente continuas sobre este espacio tenga una estructura algebraica.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. REFERENCIAS

- Atsuji, M. (1958). Uniform continuity of continuous functions of metric spaces, *Pacific J. Math.* 11-16.
doi:10.2140/pjm.1958.8.11
- Elyash, E., Laush, G., & Levine, N. (1960). On the product of two uniformly continuous functions on the line.
doi:10.2307/2309692
- Katrina Gensterblum, P. Q. (2018). Universally Uniformly continuous metric space. doi:10.1145/1067268.1067287
- Levine, N., & Saber., N. (1965). On the product of real valued uniformly continuous functions in metric spaces.
doi:10.1080/00029890.1965.11970485
- Levine, N., & Saunders, W. G. (1965). Uniformly Continuous Sets in Metric Spaces. (T. A. Monthly, Ed.) 153-156.
doi:10.1080/00029890.1960.11989465
- Nadler, J. S., & Zitney, D. M. (2007). Pointwise Products of Uniformly Continuous Functions on Sets in the Real Line. *The American Mathematical Monthly*, 160-163.
- S, N., & Ziney., D. (2007). Pointwise products of uniformly continuous functions on sets in the real line .
- S.B.Tadam, & S.M.Padhye. (2017, marzo). On Point Wise Products of Uniformly Continuous Functions on Uniform Space. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 43(3).
- S.M.Padhye, & S.B.Tadam, K. (2015). On uniformly continuous uniform space. *The International Journal Of Engineering And Science (IJES)*, 4, 43-44.
- Saber, N. L. (2018). On the product of real valued uniformly continuous functions in metric space.
- Sam B Nadler, J. a. (2007). Pointwise product of uniformly continuous functions on sets in the real line by Zitney The Mathematical Association of American. doi:10.1080/00029890.2007.11920402
- Gerald Beer, Sandro Levi. Strong uniform continuity. *J. Math. Anal. Appl.* 350 (2009) 568–589]

Contribución de autores

Autor	Contribución
Ingrid Vera	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo
Adrián Infante	Concepción, redacción y análisis