UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 8, No. 1, Enero/Abril, 2023, Ecuador (p. 65 -77). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i1.5211.

Ciencias Matemáticas

TEOREMA DE DIRICHLET, POSTULADO DE BERTRAND Y CONJETURA DE GOLDBACH

Tobías Rosas Soto*, **Otilia Quintero Palacios**
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia, República Bolivariana de Venezuela

*Autor para correspondencia: tjrosas@gmail.com

Recibido: 26-09-2022/ Aceptado: 31-03-2023 / Publicación: 26-04-2023
Editor Académico: Oswaldo José Larreal Barreto

RESUMEN

El siguiente trabajo presenta una generalización del *teorema de Dirichlet*, una nueva demostración del *postulado de Bertrand*, y una nueva forma de visualizar una posible vía para demostrar la *conjetura de Goldbach* usando el teorema Dirichlet y el postulado de Bertrand, todo esto enmarcado en la revisión del artículo titulado "*Una bella relación entre la conjetura de Goldbach y el teorema Dirichlet*". Por último, se muestra como una ampliación de la *conjetura de Goldbach* implica de manera elemental el *postulado de Bertrand*.

Palabras clave: Conjetura de Goldbach, teorema de Dirichlet, números primos, postulado de Bertrand, números pares.

DIRICHLET'S THEOREM, BERTRAND'S POSTULATE AND GOLDBACH'S CONJETURE

ABSTRACT

The following work presents a generalization of *Dirichlet's theorem*, a new proof of *Bertrand's postulate*, and a new way of visualizing a possible way to prove the *Goldbach's conjecture* using the *Dirichlet theorem* and the *Bertrand's postulate*, all this framed in the review from the article titled "*A beautiful relationship between the Goldbach's conjecture and the Dirichlet theorem*". Finally, it is shown how an extension of the *Goldbach's conjecture* implies the *Bertrand postulate* in an elementary way.

Keywords: Goldbach's conjecture, Dirichlet's theorem, prime numbers, Bertrand's postulate, even numbers.

TEOREMA DE DIRICHLET, POSTULADO DE BERTRAND E CONJECTURA DE GOLDBACH

RESUMO

O trabalho a seguir apresenta uma generalização do teorema de Dirichlet, uma nova prova do postulado de Bertrand, e uma nova forma de visualizar uma possível forma de provar a conjectura de Goldbach usando o teorema de Dirichlet e o postulado de Bertrand, todos enquadrados na revisão do artigo intitulado: "Uma bela relação entre a conjectura de Goldbach e o teorema de Dirichlet". Por fim, mostra-se como uma extensão da conjectura de Goldbach implica de forma elementar no postulado de Bertrand.

Palavras chave: Conjectura de Goldbach, teorema de Dirichlet, números primos, postulado de Bertrand, números pares

Citación sugerida: Rosas T., Quintero O. (2023). Teorema de Dirichlet, postulado de Bertrand y conjetura de Goldbach. Revista Bases de la Ciencia, 8(1), 65 -77. DOI: `https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i1.5211`

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

ISSN 2588-0764

1. INTRODUCCIÓN

Muchas ideas para estudiar la conjetura de Goldbach se han presentado, en busca de poder demostrar la misma. Algunos de estos nuevos estudios han mostrado puntos de vista muy interesantes y hasta posiblemente elementales, en comparación con otros tantos, tales como los expuestos en Intriago D. (2018, 2019).

En el siguiente trabajo se presenta una relación interesante entre el *teorema de Dirichlet*, el *postulado de Bertrand*, y la *conjetura fuerte de Goldbach* la cual se trabajá simplemente como *conjetura de Goldbach*. Gran parte de las ideas aquí propuestas se encuentran reflejadas en C. E. González P. (2015). Sin embargo, dicha publicación posee un gran número de errores, los cuales se subsanan en este manuscrito y se exponen otras ideas.

Lo esencial en este artículo es establecer que al relacionar el *teorema de Dirichlet* y el *postulado de Bertrand*, con la *conjetura de Goldbach*, la demostración de esta útlima se transforma en determinar la existencia de un valor numérico específico en una serie de Dirichlet particular. Además, se plantea una demostración bastante elemental del *postulado de Bertrand*.

Ahora bien, la importancia más notable del presente trabajo es que dicha relación se establece utilizando ideas realmente sencillas y, hasta quizás, elementales. Esto motivó el estudio, reestructuración y corrección de varias ideas presentes en C. E. González P. (2015) y la aplicación de otras nuevas.

El artículo contiene una sección de *Preliminares* donde se exponen una serie de difiniciones elementales, algunos teoremas y algunas proposicones necesarias para el desarrollo del estudio; una sección de *Rsesultados y Discusiones* donde se exponen las ideas y resultados que se pretenden aportar con este trabajo, junto con el desarrollo y justificación de las mismas. Por último se tiene la sección de *Conclusiones*.

2. PRELIMINARES

Con la intención de hacer lo más autocontenido posible este artículo se establecen a continuación las definiciones, teoremas, postulados y conjeturas pilares del mismo. A saber:

Definición 2.1 (Máximo común divisor, ver Oneto (2001)). *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se dice que c es el máximo común divisor de a y b si cumple las siguientes condiciones:*

1. $c|a$ *y* $c|b$.
2. *Si* $e|a$ *y* $e|b$, *entonces* $e|c$.
3. $c > 0$

y se denotará por $\textsf{mcd}(a, b) = c$.

Definición 2.2 (Número de Goldbach, ver C. E. González P. (2015)). *Es un entero positivo par que se puede escribir como la suma de dos números primos.*

Postulado de Bertrand (ver Niven y Zuckerman (1969)). *Para todo $n \geq 2$ existe al menos un primo p tal que $n < p < 2n$.*

Teorema de Dirichlet (ver Apostol (1980); Hardy y Wright (1960)). *Sean a, b tal que $\textsf{mcd}(a, b) = 1$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $p(n) = an + b$, contiene infinitos números primos.*

Conjetura de Goldbach (ver Oneto (2001)). *Todo número par mayor que* 2 *puede escribirse como la suma de dos números primos.*

Teorema 2.1 (ver C. E. González P. (2015)). *Sean* $a, c \in \mathbb{Z}^+$.

1. *Si* a, c *son impares, entonces:*
   (a) $\dfrac{a+c}{2}$ *es par si, y solo si,* $\dfrac{a-c}{2}$ *es impar.*
   (b) $\dfrac{a+c}{2}$ *es impar si, y solo si,* $\dfrac{a-c}{2}$ *es par.*
2. *Si* a, c *son pares, entonces* $\dfrac{a+c}{2}$ *y* $\dfrac{a-c}{2}$ *tienen la misma paridad*

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De inicio supóngase que la *conjetura de Goldbach* es cierta y tómese $k \in \mathbb{Z}$. Si $k > 4$ es un número par, defínase el número par $p = 2k$, entonces se tiene que

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

con p_1, p_2 números primos. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $p_1 > p_2$. Por tanto, $p_2 < k$ y $p_1 > k$, pues por la ecuación (1) se tiene que

$$2k = p_1 + p_2 < 2p_1 \Rightarrow k < p_1$$

Luego, es claro que $p_2 < k$, pues de lo contrario se tendría que $2k < p_1 + p_2$ contradiciendo la ecuación 1. Ahora, siendo $p_2 < k$, se tiene que existe un número impar $l \geq 1$ tal que $k - l = p_2$ y por tanto,

$$k + k = 2k = p_1 + (k - l) \Rightarrow p_1 = k + l$$

de donde $2k = p_1 + p_2$, con $k + l = p_1$ y $k - l = p_2$.
Razonando de forma similar al caso anterior, si $k > 1$ es un número impar entonces existe un número par p tal que

$$2k = (k + p) + (k - p),$$

donde

$$k + p = p_1 \qquad \text{y} \qquad k - p = p_2.$$

Mostrando así que si dado un número k fijo, se encuentra un número l que al sumarlo y restarlo a k se obtiene un número primo en ambos casos entonces $2k$ es un número de Goldbach.
Ahora se muestra un teorema, presente en C. E. González P. (2015), cuyo enunciado es un poco pesado a la lectura, en la referencia citada, y no se presenta su demostración detallada.

Teorema 3.1. *Sean* $m, n \in \mathbb{Z}^+$*, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si* $p_1 = 4m + 1$ *y* $p_2 = 4n - 1$ *son números primos, y* $k = 2(m + n)$*, entonces* $2k = p_1 + p_2$.

ISSN 2588-0764

2. *Si* $p_1 = 4m+1$ *y* $p_2 = 4n+1$ *son números primos, y* $k = 2(m+n)+1$*, entonces* $2k = p_1+p_2$.

3. *Si* $p_1 = 4m-1$ *y* $p_2 = 4n-1$ *son números primos, y* $k = 2(m+n)-1$*, entonces* $2k = p_1+p_2$.

Prueba. Para la parte *1.*, tómese $l = 2(m-n)+1$ y así

$$k - l = 2(m+n) - [2(m-n)+1] = 4n+1 \quad \text{y} \quad k + l = 2(m+n) + [2(m-n)+1] = 4m+1$$

De manera que,

$$2k = k + k = (k+l) + (k-l) = (4m+1) + (4n+1) = p_1 + p_2.$$

Para mostrar el ítem *2.* se toma $p = 2(m-n)$ y así

$$k - p = 2(m+n) + 1 - [2(m-n)] = 4n+1 \quad \text{y} \quad k + p = 2(m+n) + 1 + [2(m-n)] = 4m+1$$

Por tanto,

$$2k = k + k = (k+p) + (k-p) = (4m+1) + (4n+1) = p_1 + p_2.$$

Para mostrar el ítem *3.* se toma $p = 2(m-n)$ y así

$$k - p = 2(m+n) - 1 - [2(m-n)] = 4n-1 \quad \text{y} \quad k + p = 2(m+n) - 1 + [2(m-n)] = 4m-1$$

Por tanto,

$$2k = k + k = (k+p) + (k-p) = (4m-1) + (4n-1) = p_1 + p_2.$$

□

El siguiente resultado se puede ver en C. E. González P. (2015) como un teorema sin demostración, esta última se puede obtener como implicación directa del Teorema 3.1, usando el hecho de que existen infinitos números primos de la forma $4l \pm 1$, por tal motivo aquí es enunciado como un cololario, a saber:

Corolario 3.1.

1. *Existen infinitos números de Goldbach de la forma* $2p$*, con* p *par.*

2. *Existen infinitos números de Goldbach de la forma* $2l$*, con* l *impar.*

Prueba. Para mostrar el ítem *1.* tómese en cuenta que existen infinitos primos de la forma $4m+1$ y $4n-1$, entonces existen infinitos números de la forma $4(m+n)$. Haciendo $p = 2(m+n)$, se tiene lo deseado.
Por otro lado, el ítem *2.* se cumple pues existen infinitos números primos impares l. Así, $2l$ siempre es un número de Goldbach y por tanto se tiene lo deseado. □

Corolario 3.2. *Sean* p_1, p_2 *números impares positivos distintos. Si* $k = \dfrac{p_1+p_2}{2}$ *es un número par (impar), entonces existe un número impar (par)* l*, con* $l < k$*, tal que*

$$k + l = p_1 \quad y \quad k - l = p_2$$

En particular, si p_1, p_2 *son números primos, entonces* $\mathit{mcd}(k,l) = 1$.

Prueba. Supóngase que k es par. Por el ítem *(a)* del Teorema 2.1, como $k = \dfrac{p_1+p_2}{2}$, se tiene que $l = \dfrac{p_1-p_2}{2}$ es impar. Así, $k+l = p_1$ y $k-l = p_2$.
Por otro lado, $p_2 > -p_2$ pues $p_2 > 0$. De manera que,

$$k = \frac{p_1+p_2}{2} > \frac{p_1-p_2}{2} = l.$$

Ahora, suponiendo que $\mathsf{mcd}(k,l) = d$, entonces $d|k$ y $d|l$, y por tanto $d|(k+l)$, de donde $d|p_1$. Así, tomando en cuenta que $l < p_1$ y $k < p_1$, la Definición 2.1, y el hecho de que p_1 es un número primo, se tiene que $d = 1$. Razonando de forma similar se obtiene el resultado si k es impar usando el ítem *(b)* del Teorema 2.1. □

Nótese que en el Corolario 3.2 se toman $p_1 \neq p_2$ pues de lo contrario no se podría obtener que si si p_1, p_2 son números primos, entonces $\mathsf{mcd}(k,l) = 1$. Sin embargo, eliminando esta parte dicho corolario sigue siendo cierto.
Es importante notar que el Corolario 3.2 se puede encontrar en (C. E. González P., 2015, Corolario 1.1) sin ninguna demostración, la cual se suministra en este manuscrito. De igual forma en (C. E. González P., 2015, Conjetura 1) se conjeturó lo siguiente:

> Sea P un número par (impar), entonces existe un impar (par) $I < P$, con $\mathsf{mcd}(P,I) = 1$, de tal manera que $P+I = p_1$ y $P-I = p_2$ donde p_1, p_2 son números primos.

Analizando dicha conjetura se pudo notar que la misma es falsa. Nótese que tomando $P = 2$ e $I = 1$, se puede verificar que las condiciones de la hipótesis se cumplen pero $P+I$ y $P-I$ no son ambos números primos, ya que $2+1 = 3$ y $2-1 = 1$, y el número 1 no es considerado un número primo. Sin embargo, proponemos la siguiente conjetura:

Conjetura 3.1. *Sea k un número par (impar), con $k > 4$. Entonces, existe un número impar (par) $l < k$ y $\mathsf{mcd}(k,l) = 1$ tal que:*

$$k+l = p_1 \ \ y \ \ k-l = p_2$$

son números primos.

Ahora, como se mostró al inicio de sección, si la *conjetura de Goldbach* fuera cierta, entonces se tendría que para todo número par $k > 4$ siempre existiría un número primo l tal que $k-l = p$ con p un número primo, lo cual es solo parte de lo que asevera la Conjetura 3.1. Sin embargo, la veracidad de la Conjetura 3.1 implica la veracidad de la conjetura de Goldbach para todo número par $n = 2k$ con $k > 4$ y por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ pues los casos para $1 \leq k \leq 4$ se pueden verificar por simple inspección.
Ahora, recuérdese que el *teorema de Dirichlet* afirma que dados $a, b \in \mathbb{N}$, si $\mathsf{mcd}(a,b) = 1$, entonces la sucesión

$$p(n) = an + b \tag{2}$$

contiene infinitos números primos. En S. M. González P. Campos E. y García (2011) se busca hacer un análisis de todas las posibilidades para a y b donde la expresión presente en la ecuación (2) sea un número primo. Sin embargo, dicho análisis es incompleto y por tanto se muestra aquí el análisis completo. A saber, para que $p(n)$ sea un número primo se debe tener que:

1. Los números b y a no pueden ser pares simultáneamente ya que mcd$(a, b) = 1$.

2. Si b es par y a impar, entonces n debe ser impar. Pues de ser a impar, con b y n pares, se tendría de igual forma que $p(n) = 2r$ con $r \in \mathbb{N}$ y $r > 1$, lo cual sería una contradicción. Así, siendo $n = 2t + 1$, se tendría que
$$p(t) = a(2t + 1) + b = a + b + 2ta = b' + a't$$
donde $a' = 2a$ es par y $b' = a + b$ es impar.

3. Si b y a son impares, entonces n debe ser par. Pues de ser n impar, con b y a impares, entonces $p(n) = 2r$ con $r \in \mathbb{N}$ y $r > 1$, lo cual sería una contradicción. Ahora, siendo $n = 2t$, se obtiene que
$$p(t) = a(2t) + b = 2at + b = a't + b$$
donde $a' = 2a$ es par.

Así las únicas posibilidades de que la expresión dada en la ecuación (2) sea un número primo, se reduce a los casos donde a es un número impar y b es un número par.
Ahora, si $a > b$ por el algoritmo de la división se tiene que $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$, donde r debe ser impar, así
$$p(n) = bq + r + bn = b(n + q) + r.$$
Por tanto, solo en los caso donde $a < b$, con a un número par, b un número impar, y mcd$(a, b) = 1$, se presentan números primos en la sucesión $p(n) = an + b$. Con este análisis se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Sea $t \in \mathbb{Z}$, entonces la sucesión*
$$p_t(n) = 2tn + l,$$
con mcd$(2t, l) = 1$ y $l \in \{1, 3, 5, ..., 2t - 1\}$, contiene infinito números primos.

Cabe resaltar que el Teorema 3.2 es un versión corregida del resultado que se establece de forma deficiente en (C. E. González P., 2015, Teorema 1.4), pues en dich referencia no se establece la condición de que mcd$(2t, l) = 1$.
A continuación se establece dos resultados interesantes relacionado en parte con el *teorema de Dirichlet*:

Lema 3.1. *Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número impar $l \leq 4n - 1$ tal que $p(n) = 4n + l$ es un número primo.*

Prueba. Nótese que si $n = 1$ se tiene que la expresión $p(1) = 4 + l$ es primo para $l = 1$, donde $l \leq 3$. Supóngase cierto para $n = k$, entonces existe un número l, con $1 \leq l \leq 4k - 1$, tale que $p(k) = 4k + l$ es un número primo. Se verá ahora que se cumple el caso para $n = k + 1$, por tanto se debe buscar un l_0 tal que $p(k + 1) = 4(k + 1) + l_0$. De manera que haciendo $l_0 = l - 4$ se tendría que
$$p(k + 1) = 4(k + 1) + l_0 = 4k + (l_0 + 4) = 4k + l \tag{3}$$
que es un número primo por hipótesis inductiva.. Por útlimo, como $l \leq 4k - 1$ y $l - 4 < l \leq 4k - 1 < 4k + 3$ se tiene que $l_0 \leq 4k + 3$. □

Lema 3.2. *Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número impar $1 \leq l' \leq 4n - 1$ tal que $q(n) = 4n - l'$ es un número primo.*

Prueba. Para que la expresión $q(1) = 4 - l'$ sea un número primo basta tomar $l' = 1$ donde $1 \leq l' \leq 3$. Supóngase ahora que existe$1 \leq l' \leq 4k - 1$ tal que $q(k) = 4k - l'$ es un número primo. Luego, nótese que

$$q(k+1) = 4(k+1) - l'_0 = 4k - (l'_0 - 4) \tag{4}$$

de manera que haciendo $l'_0 = l' + 4$ se tendría que la expresión dada en (4) es un número primo por hipótesis inductiva. Por útlimo, como $1 \leq l' \leq 4k - 1$ y $5 \leq l' + 4 < l \leq 4k + 3$ se tiene que $1 < l'_0 \leq 4k + 3$. □

Teniendo en cuenta los Lemas 3.1 y 3.2 se puede establecer el siguiente resultado que será usado para elaborar una demostración del *postulado de Bertrand* más elemental que la presentada en Niven y Zuckerman (1969).

Teorema 3.3. *Sean $t, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces, existen números impares $l \leq 2tn - 1$ y $1 \leq l' \leq 2tn - 1$ de tal manera que:*

1. *$p_t(n) = 2tn + l$ es un número primo.*
2. *$q_t(n) = 2tn - l'$ es un número primo.*

Prueba. Para probar el ítem *1.* se aplica inducción sobre "n". Tomando $n = 2$ se obtiene la expresión $p_t(2) = 4t + l$ y aplicando el Lema 3.1 exite un número impar $l \leq 4t - 1$ tal que $p_t(2)$ es un número primo. Supóngase ahora que existe un número $l_0 \leq 2tk - 1$ tal que $p_t(k) = 2tk + l_0$ es un número primo, como

$$p_t(k+1) = 2t(k+1) + l = 2tk + 2t + l = 2tk + (l + 2t)$$

basta tomar $l = l_0 - 2t$ para que $p_t(k+1)$ sea un número primo, por hipótesis inductiva. Luego, como $l_0 \leq 2tk - 1$, se tiene que $l < 2t(k-1) - 1 < 2t(k+1) - 1$, obtiendo así lo deseado.
Para probar el ítem *2.* se razona de forma similar, tómese $n = 2$ y considérese la expresión $q_t(2) = 4t - l'$. Por el Ĺema 3.2 existe un número impar $1 \leq l' \leq 4t - 1$ tal que $q_t(2)$ es un número primo. Supóngase ahora que $q_t(k) = 2tk - l'_0$ es un número primo para algún impar $1 \leq l'_0 \leq 2tk - 1$. Como

$$p_t(k+1) = 2t(k+1) - l' = 2tk + 2t - l' = 2tk - (l - 2t),$$

basta tomar $l = l_0 + 2t$ para que $p_t(k+1)$ sea un número primo, por hipótesis inductiva. Luego, como $1 \leq l'_0 \leq 2tk - 1$, entonces

$$1 + 2t \leq l'_0 + 2n \leq 2tk - 1 + 2t = 2t(k+1) - 1\}$$

y por tanto $1 \leq l' \leq 2t(k+1) - 1$, obteniendo así lo deseado. □

Observación 3.1. Es importante notar que el Lema 3.1 se puede refinar más si utilizamos el *postulado de Bertrand* para su demostración. Dicho postulado asegura la existencia de un número primo q entre $2tn$ y $4tn$, es decir,

$$2tn < q < 4tn \tag{5}$$

Por tanto, existe un número impar $r \in \mathbb{N}$ tal que $q = 2tn + r$, con $0 < r < 2tn$, por la ecuación (5). Así, tomando $l = r$ se tendría que $p_t(n) = 2tn + l$ es un número primo con $1 \leq l \leq 2tn - 1$. Con esto el Lema 3.1 quedaría enunciado de la siguiente forma:

> *"Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ existe un número impar $1 \leq l \leq 4n-1$ tal que $p(n) = 4n+l$ es un número primo."*

Ahora, en (C. E. González P., 2015, Corolario 1.2), se establece el siguiente enunciado :

> Sea I un impar dado. Para todo $n \geq 5$ impar, existe un par $P, P' < In$ con $((In, P)) = 1$, $((In, P')) = 1$ de tal manera que
>
> $$p_1 = In + P, p_2 = In - P'$$
>
> son primos.

cuya demostración presenta fallas. Dado que este enunciado se puede demostrar como una implicación directa del Teorema 3.3, entonces se enuncia de la siguiente manera:

Corolario 3.3. *Sea k un número impar positivo. Para todo $n \geq 5$ impar, existen números pares $p, p' < kn$ con mcd$(kn, p) = 1$ y mcd$(kn, p') = 1$ tales que*

$$p_1 = kn + p \quad y \quad p_2 = kn - p'$$

son números primos.

Prueba. Sea k un número impar y p un número par, con $p < k$. Considérese la expresión $p(n) = kn + p$. Como n es impar, entonces $n = 2m + 1$ para $m \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$p(n) = k(2m+1) + p = 2km + l = p_k(m), \quad \text{con} \quad l = k + p$$

Obsérvese que $p + k < 2k$, ya que $p < k$, entonces $l < 2k$. De manera que, aplicando el Teorema 3.3 a la expresión $p_k(m) = 2km + l$, se tendría que existe un número l con $l < 2k$, tal que $p_k(m)$ es un número primo. Por tanto, existiría el número par $p = l - k$ tal que $p_1 = kn + p$ es un número primo. Luego, de manera similar, tómese $p(n) = kn - p$. Como $-p < k$, se tiene que $k - p < 2k$. Así, tomando $n = 2m + 1$ se obtiene que

$$p(n) = k(2m+1) - p = 2km + l' = p_k(m), \quad \text{con} \quad l' = k - p.$$

De manera que aplicando el Teorema 3.3 a la expresión $p_{tk}(m) = 2km + l'$ se tendría que existe un número l' con $l' < 2k$ tal que $p_k(m)$ es un número primo. Por tanto, existiría el número par $p = k - l'$ tal que $p_2 = kn - p$ es un número primo. □

Nótese que $p - k$, con p par y k impar, no solamente es un número primo cuando mcd$(p, k) = 1$. Por ejemplo, tómese $p = 6$ y $k = 3$, entonces mcd$(6, 3) = 3 \neq 1$ Obsérvese el siguiente resultado que se puede ver en (C. E. González P., 2015, Teorema 1.6)

Teorema 3.4. *Supóngase que mcd$(2n, k) = l \neq 1$ y que $p_1 = 2n - k$ es un número primo, entonces $p_1 = l$.*

Prueba. Como mcd$(2n, k) = l \neq 1$, entonces $l|2n$ y $l|k$, de manera que existen $r, r' \in \mathbb{N}$ tales que $2n = lr$ y $l = lr'$, respectivamente. Por tanto,

$$p_1 = 2n - k = lr - lr' = l(r - r')$$

Como p_1 es primo, y $l \neq 1$, se deduce que $r - r' = 1$. Así, $p_1 = l$ con $r = r' + 1$ □

Como se puede evidenciar en C. E. González P. (2015), del Teorema 3.3 y Corolario 3.3 se deduce el famoso *postulado del Bertrand*. Sin embargo, la demostración presentada en C. E. González P. (2015) tiene varias ambigüedades que se corrigen en la demostración que se presenta a continuación:

Postulado de Bertrand. *Para todo $n \geq 2$ existe al menos un primo p tal que $n < p < 2n$.*

Prueba. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se tienen dos casos n par y n impar. Si n es par, entonces $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$. Si $k = 1$, es claro que $p = 3$. Si $k \geq 2$, por el Teorema 3.3, existe $1 \leq l \leq 2k-1$ tal que $p(k) = 2k+l$ es un número primo. Como $l < 2k$, entonces $2k + l < 4k$. Así, $2k < 2k + l < 4k$ de manera que $n < p(k) < 2n$.
Sea n impar. Si $n = 3$, entonces $p = 5$. Si $n \geq 5$, por el Corolario 3.3, dado un l impar existe un número par p, con $p < ln$ y $\mathsf{mcd}(ln, p) = 1$, tal que $p(n) = ln + p$ es primo. Tómese $l = 1$, así existe un $p < n$ con $\mathsf{mcd}(n, p) = 1$ tal que $p(n) = n + p$ es primo y por tanto $n < p(n) < 2n$. □

El resultado que se presenta a continuación completa una equivalencia entre el *postulado de Bertrand* y el Teorema 3.3.

Teorema 3.5. *Si para todo $n \geq 2$ existe un impar l (l_1) de tal manera que $2n + l$ $(2n - l_1)$ es un número primo, entonces para todo $n \geq 2$ existe un primo p tal que $n < p < 2n$.*

Prueba. Sea p un primo tal que $n < p < 2n$. Como $p < 2n$ existe un impar l_1 tal que $p + l_1 = 2n$, es decir, existe un impar l_1 tal que $p = 2n - l_1$ es primo, donde l depende de p. Ahora, como $2n < 2p < 4n$, existe un primo q tal que $2n < q < 4n$, por hipótesis. Luego, existe l impar tal que $2n = q - l$ y por tanto $q = 2n + l$, con lo que se obtiene lo deseado. □

Para continuar supóngase que para $n \geq 2$ se tiene

$$p = 2n + l \quad \text{y} \quad q = 2n - l,$$

entonces sumando las dos ecuaciones se encuentra que

$$p + q = 4n$$

y restándolas se obtiene que

$$p - q = 2l$$

implicando que

$$p = 2l + q$$

lo cual también se puede conseguir sumando y restando l en el lado derecho de la ecuación $p = 2n+l$. Ahora, supóngase que existe un número impar $1 \leq l \leq 2n - 3$ de tal manera que

$$p = 2n + l, \quad \text{y} \quad q = 2n - l$$

sean números primos. Así,

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq & l & \leq 2n-3 \\ 2n+1 \leq & 2n+l & \leq 4n-3 \\ 2n+1 \leq & p & \leq 4n-3 \end{array}$$

ISSN 2588-0764

De igual manera, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 \leq &\quad l &\leq 2n-3 \\ 3-2n \leq &\quad -l &\leq -1 \\ 3 \leq &\quad 2n-l &\leq 2n-1 \\ 3 \leq &\quad q &\leq 2n-1 \end{aligned}$$

Sumando las dos últimas desigualdades de p y q se encuentra que

$$2n+4 \leq p+q \leq 6n-4$$

Si se quiere obtener que $p+q=2n$ debe cumplirse que

$$p+q=\frac{2n+4+6n-4}{2}=4n,$$

es decir, $p+q$ debe ser el punto medio del intervalo

$$[2n+4, 6n-4]$$

A partir de este punto se tratará de probar que dicho número l existe. Nótese que el *postulado de Bertrand* establece la existencia de un número primo q (impar) tal que $n<q<2n$, de manera que $3 \leq q \leq 2n-1$. Por tanto, existe l impar positivo tal que $q=2n-l$ y, además $\mathrm{mcd}(q,4n)=1$, pues de lo contario se tendría que $q|n$ lo cual no es posible pues $n<q$. Veamos que existe un primo p tal que $p=2l+q$. Como $\mathrm{mcd}(2,q)=1$, la sucesión $p=2m+q$ contiene infinitos números primos, por el *teorema de Dirichlet*. Elijamos un impar l_0 tal que $p=2l_0+q$ sea primo, así

$$p=2l_0+q$$

$$p-l_0=2k=l_0+q$$

$$p=2l+l_0 \qquad \text{y} \qquad q=2l-l_0.$$

Es decir, para el par $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) existe un impar l_0 que nos da el resultado deseado. Luego, igualando los valores de q se obtiene que

$$2(n-k)=l-l_0.$$

Faltaría probar que $l=l_0$ para obtener que $n=l$ y así concluir que $4n=p+q$ para $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, con las herramientas presentes hasta este punto no es posible garantizar que $n=l$. Además, es importante resaltar que probando la igualdad $n=l$, solo se mostraría que los números pares de la forma $4n$, se pueden escribir como suma de dos números primos, es decir, cuando n es un número par de la forma $2h$, con $(h \in \mathbb{N})$. Y no demostraría la totalidad de la *conjetura de Goldbach* como se afirma en C. E. González P. (2015).
Por último, supóngase que se amplia la *conjetura de Goldbach* de la siguiente forma:

Conjetura 3.2 (Goldbach-Rosas)**.** *Todo número par $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de dos números primos impares distintos.*

Ahora, suponiendo verdadera la Conjetura 3.2 se podría demostrar fácilmente el postulado de Bertrand. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ y $n=2k$, por la Conjetura 3.2 existen números primos p y q distintos tales que $n=p+q$, donde tanto p como q son menores que $2k$. Luego, se tiene $p>k$ o $q>k$, pues si $p>k$ y $q>k$ entonces $p+q>2k=n$ lo cual es una contradicción. De igual forma si $p<k$ y $q<k$, entonces $p+q<2k=n$ lo cual es una contradicción. Por tanto, el primo que sea más grande que k es el primo que satisface el *postulado de Bertrand*.

4. CONCLUSIONES

Se puede concluir que la conjetura de Goldbach, el postulado de Bertrand el teorema de Dirichlet están fuertemente relacionados. La idea presentada parece indicar que la Conjetura de Goldbach podría tener una demostración con estructuras matemáticas relativamente sencillas. Además, se coloca en evidencia que no se pueden dar por cierto enunciados sin un riguroso proceso de validación del razonamiento que justifique del mencionado de dicho enunciado.

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

6. REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1980). *Introducción a la teoría analìtica de números.* Editorial REVERTE, S.A., Barcelona, España, ISBN 84-291-5006-4.

González P., C. E. (2015). Una bella relación entre la conjetura de goldbach y el teorema de dirichlet. *Scientia et Technica*, **20***(3)*, 294-300.

González P., S. M., Campos E. y García. (2011). Algunos tópicos en teoría de números: Números mersenne, teorema dirichlet, números fermat. *Scientia et Technica*, **2***(48)*, 185-190.

Hardy, G. H., y Wright, E. M. (1960). *An introduction to the theory of numbers.* Oxford at the Clarendon Press, Great Britain, Fourth edition.

Intriago D., Y. (2018). Números primos; método gráfico de la conjetura de goldbach. *Revista Bases de la Ciencia*, **3***(2)*, 77-95.

Intriago D., Y. (2019). Conjetura de goldbach, números naturales y teorema de números primos. *Revista Bases de la Ciencia*, **4***(1)*, 45-64.

Niven, I., y Zuckerman, H. (1969). *Introducción a la teoría de números*. LIMUS-WILEY, S.A., México, 2^a Edición.

Oneto, □. (2001). *Números, anillos y cuerpos*. EDILUZ, 1^a Edición, Maracaibo, Venezuela,ISBN 980-232-820-0.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Otilia Quintero	Metodología, redacción, búsqueda bibliográfica
Tobías Rosas	Concepción, redacción, diseño y revisión del artículo