BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764
Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 271 -289). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5410.

Ciencias Matemáticas

ANÁLISIS DE PROPIEDADES EN LA ELECCIÓN SOCIAL

Guilber Vergara [1], **Jahn Leal**[2],
[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.
Email: gvergara3860@utm.edu.ec
[2]Departamento de Matemáticas, Centro Interdisciplinario de Lógica y Álgebra (CILA), Universidad de Los Andes, Venezuela. Email: jleal@ula.ve

*Autor para correspondencia: gvergara3860@utm.edu.ec

Recibido: 19-12-2022/ Aceptado: 26-12-2022/ Publicación: 27-12-2022
Editor Académico: Carmen Judith Vanegas

RESUMEN

Realizamos un análisis de las propiedades más relevantes en el marco de la teoría de elección social y adicionalmente analizamos nuevas propiedades de racionalidad para las funciones de elección social con perfiles de tamaño variable.
Palabras clave: Concatenación, función de elección Social, preórdenes.

PROPERTY ANALYSIS IN SOCIAL CHOICE

ABSTRACT

We carry out an analysis of the most relevant properties within the framework of social choice theory and additionally we analyze new rationality properties for social choice functions with profiles of variable size.
Keywords: Concatenation, Social choice function, preorders.

ANÁLISE DA PROPRIEDADE NA ESCOLHA SOCIAL

RESUMO

Realizamos uma análise das propriedades mais relevantes no âmbito da teoria da escolha social e adicionalmente analisamos novas propriedades de racionalidade para funções de escolha social com perfis de tamanho variável.

Palavras chave: concatenação, encomendas, Função de escolha social.

Citación sugerida: Vergara, G., Leal, J. (2022). Análisis de propiedades en la elección social. Revista Bases de la Ciencia, 7, (Especial), Diciembre, 271 -289. DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.5410

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Elección Social trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad. El problema general, de la teoría de elección social, consiste en lo siguiente: dado un grupo de *alternativas* (candidatos) y un grupo de *individuos* (votantes) con sus preferencias sobre los *candidatos* ¿cómo elegir los *"mejores" candidatos* para todo el grupo de *individuos*?, ¿en qué medida el método escogido es *"bueno"*? Responder esta última pregunta se resume a saber cuáles propiedades satisfacen los mecanismos o métodos de elección considerados. Por ejemplo, supongamos que el conjunto de candidatos o alternativas es $X = \{x, y, z, w\}$ y supongamos que el conjunto de votantes o individuos es $\mathrm{N} = \{1, 2, 3\}$; es decir, tenemos cuatro candidatos o alternativas y tres votantes o individuos. Esto pudiera simular una situación de un jurado de concurso que establecen preferencias sobre los candidatos para optar a un cargo en determinada empresa. Es importante hacer notar que, en una situación como ésta no se está considerando el "método" que tiene cada jurado para ordenar las alternativas. Un posible perfil de votos o vector de preferencias puede representarse así:

$$u = \begin{pmatrix} & z & w \\ xz & x & z \\ w & w & y \\ y & y & x \\ -- & -- & -- \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix}$$

Note en el perfil u lo siguiente: las alternativas preferidas del primer votante son x y z, su segunda opción sería w y la alternativa menos preferida es y; la alternativa preferida del segundo votante es z, su segunda opción sería x, su tercera opción w y la alternativa menos preferida es y; finalmente, la alternativa preferida del tercer votante es w, su segunda opción sería z, su tercera opción y y la alternativa menos preferida es x.

Con la información presentada en el perfil u ya podemos intentar presentar mecanismo para elegir la mejor alternativa. La alternativa z sería una buena elección, pues aparece dos veces en el "top" y el tercer votante la coloca como segunda opción. Pudiéramos estar pensando entonces en un mecanismo así: *la alternativa ganadora es la que aparezca más veces en el "top"*. Esta manera de elegir o escoger es a primera vista buena, pero en general deben formularse propiedades que sean deseables que cumplan los mecanismos de elección. Formular propiedades "deseables" o "no deseables" ha sido parte de la teoría de elección social. Aquí presentamos un conjunto de propiedades conocidas en la literatura y hacemos un análisis de ellas.

Algo importante de notar es que la relevancia de estudio de las propiedades de las funciones de elección social puede ver en el teorema de Arrow. El Teorema de Imposibilidad de Arrow establece que cuando se tienen tres o más alternativas para que un cierto número de votantes, no existe una función de elección social que permita generalizar las preferencias de los individuos hacia una "preferencia social", de manera tal, que al mismo tiempo se cumplan ciertos criterios "razonables" de racionalidad y valores democráticos. O en términos más sencillos: en ausencia de una unanimidad plena y bajo hipótesis que parecen razonables, el interés colectivo no puede existir.

Los métodos o mecanismos de agregación social de los más estudiados son las funciones de elección social (ver, Arrow (1963); Kelly (1988); Pino (2013); Taylor (2005)). Una función de elección social considera dos parámetros: el conjunto de alternativas y el perfil de preferencias de los individuos sobre

las alternativas. También existen otros métodos de agregación tales como funciones de bienestar social y esquemas de voto Taylor (2005). Todos estos mecanismos son conocidos como reglas de elección social o reglas de voto. En este trabajo se analiza las propiedades clásicas de la teoría de elección social para funciones de elección social. Además, se consideran un tipo de funciones de elección social cuyo dominio es variable, es decir, el conjunto de votantes no está fijo como en el caso de las funciones de elección social. Además de realizar un análisis detallado de la propiedades de conocidas en el marco de la teoría de elección social proponemos nuevas propiedades que resultan de la interpretación de propiedades estudiadas en el marco de la fusión de información Konieczny y Pérez (2002).
Son muchos los escenarios donde las funciones de elección social son útiles. Ver si la función es "buena o no" depende de las propiedades que satisfaga. Claramente, al tener una análisis de las propiedades en el marco de la teoría de elección social, se contribuye fuertemente al desarrollo de la investigación en este campo. Esto tiene una gran importancia al momento de proponer métodos de agregación que sean del tipo de funciones de elección social. Se acorta un camino importante para el modelador de procesos de agregación como también para el reconocimiento de las bondades de los mecanismos propuestos. Ciertas propiedades se consideran deseables dependiendo del resultado que se quiera obtener en un escenario de elección objeto de estudio.

En resumen nos proponemos dos tareas importantes: la primera es realizar una compilación de todas las propiedades más conocidas de las funciones de elección social para luego analizarlas, y la segunda, es proponer un nuevo escenario de funciones de elección social alterando el dominio, es decir, colocando dominio variable. Esto se hace concatenando (uniendo) perfiles de preferencias y así interpretar algunas propiedades de consistencia de la fusión de la información en la elección social. Posteriormente, nos dedicamos a analizarlas. Para entender nuestro último propósito debemos mostrar donde aparecen estas propiedades desde el punto de vista de la fusión de la información en el marco de la lógica. El trabajo en cuestión es de Sébastien Konieczny y Ramón Pino Pérez, *Merging Information Under Constraints: A Logical Framework* publicado en el año 2002 en J. Logic Computat, Oxford University Press Konieczny y Pérez (2002). Nos referimos a dos propiedades que aparecen en la definición 3.1 identificadas como IC5 e IC6; y conocidas como propiedades de consistencia. De allí nace la idea de la concatenación de perfiles y las propiedades de consistencia que presentamos más adelante, al igual que su respectivo análisis. Es importante resaltar que estas propiedades de consistencia ya han sido presentadas por Denis Bouyssou, Thierry Marchant y Patrice Perny en *Social Choice Theory and MulticriteriaDecision Aiding* en el 2010, ver **?**. Aunque lo presentado por Bouyssou et al., no es precisamente lo que hacemos en este trabajo es importante señalar que muestran interesantes resultados entre algunas propiedades y la función de Borda, entre otras cosas.

2. PRELIMINARES

Las preferencias sobre las alternativas se representan por relaciones binarias. Nosotros usaremos preórdenes totales. El proceso de agregación de las preferencias individuales en una preferencia social se conoce como mecanismos de elección. Se requiere de poco ingredientes para presentar el escenario de la teoría de elección social; veamos, $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$ es un conjunto de n de individuos o votantes que conforman una sociedad, y consideraremos el conjunto finito de *alternativas* o *candidatos* denotado por $X = \{x, y, z, \cdots\}$. Inicialmente el tamaño del conjunto de votantes esta fijo. Ahora, vamos a representar las preferencias de cada individuo mediante una relación que, en nuestro caso, será un preorden total, es decir, una relación transitiva, reflexiva y total. Así, la relación $\succeq_i$, representa

la preferencia del individuo i sobre las alternativas, es decir, si $x, y \in X$, entonces $x \succeq_i y$ significa que el individuo i considera a la alternativa x mejor o igual que a la alternativa y.
La preferencia estricta, entre dos candidatos, para un individuo es relación estricta $\succ_i$ asociada a $\succeq_i$ se define así:

$$x \succ_i y \text{ si y sólo si, } x \succeq_i y \ \wedge \ y \not\succeq_i x.$$

De manera similar podemos definir la relación de indiferencia, que representará el caso en que a un individuo le sea indiferente votar por una alternativa tanto como por la otra. Esta relación de indiferencia $\simeq_i$ asociada a $\succeq_i$ se define así:

$$x \simeq_i y \text{ si y sólo si, } x \succeq_i y \ \wedge \ y \succeq_i x.$$

Teniendo las preferencias individuales, podemos representar las preferencias de todos los individuos mediante un vector, el cual llamaremos *perfil*. Un *perfil* u es un vector de la forma

$$u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n).$$

En general, cada componente $\succeq_i$ es preorden total y representa la preferencia del individuo i. Luego, cada componente de u almacena la información respecto al voto de algún individuo. Note que las alternativas preferidas por cada individuo aparecen en la parte superior en cada preorden $\succeq_i$.
Denotemos con la letra P^n al conjunto de todos los perfiles sobre X de tamaño n. Llamaremos *agenda* a cualquier subconjunto de X no vacío. Al conjunto de todas las agendas lo denotamos por $\mathcal{P}^*(X) = \{V \subset X : V \neq \emptyset\}$.
La naturaleza del conjunto de alternativas o candidatos puede ser muy extensa. En particular, las alternativas pudieran ser políticas de alguna empresa, proyectos, etc. Por tal razón usamos las palabras *alternativa* o *candidato*.

Definición 1. *Se define función de elección social como una función parcial:*

$$f : \mathrm{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X),$$

tal que para todo $u \in \mathrm{P}^n$ y todo $V \in \mathcal{P}^*(X)$, se tiene que $f(u, V) \subseteq V$, siempre que $f(u, V)$ exista.

Es importante notar, que el subconjunto de candidatos o alternativas del resultado de la elección sea no vacío, como también que las preferencias individuales están definidas sobre todo el conjunto de alternativas X.

La función de Borda

La regla de Borda o *Función de Borda* fue propuesta en 1770 por el físico y oficial de marina francés Jean Charles de Borda, de quien toma el nombre. Es una de las funciones de elección más popular dentro de la teoría de elección social. Esta función de elección social consiste esencialmente en establecer rangos de números naturales a los niveles con respecto a las preferencias individuales. De este modo, para cada preferencia individual, una alternativa tendrá un rango asignado dependiendo del nivel en que se encuentre, y en consecuencia, el rango global será la suma de los rangos individuales. Veamos su definición.

Definición 2. *Sean* $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. *Para cada elemento* $\succeq_i$ *de un perfil* $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_m)$ *existe una función de rango* $r_i(x)$ *definida por:*

$$r_i(x) = k \Leftrightarrow k \text{ es el mayor entero tal que } \exists x_1, \ldots, x_k \in X,\ x_j \prec_i x_{j+1} \text{ y } x_k = x.$$

El rango global para cada elemento $x \in X$ *lo definimos así:*

$$r(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x).$$

Finalmente definimos la función de Borda así:

$$f^B(u, V) = \{x \in V :\ r(x) \geq r(y),\ \forall y \in V\}.$$

En el año 1785, tres años después de que Condorcet introdujera el concepto de *ganadores de Condorcet*, Charles Borda mostró la situación de la *paradoja del voto* para luego proponer la función que lleva su nombre.
A propósito de ilustrar la función de Borda mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Sea* $X = \{x, y, z, w\}$ *un conjunto de candidatos o alternativas y supongamos que* $|\mathrm{N}| = 3$. *Consideremos el siguiente perfil de preferencias* u*, donde indicaremos el rango que tiene cada nivel:*

$$u = \begin{pmatrix} x & & w \\ y & zy & y \\ z & w & z \\ w & x & x \\ -- & -- & -- \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow 4 \\ \longleftarrow 3 \\ \longleftarrow 2 \\ \longleftarrow 1 \end{array}$$

Veamos los rango de cada candidato:

- $r_1(x) = 4$, $r_2(x) = 1$ *y* $r_3(x) = 1$. *En consecuencia* $r(x) = 6$.
- $r_1(y) = 3$, $r_2(y) = 3$ *y* $r_3(y) = 3$. *En consecuencia* $r(y) = 9$.
- $r_1(z) = 2$, $r_2(z) = 3$ *y* $r_3(z) = 2$. *En consecuencia* $r(z) = 7$.
- $r_1(w) = 1$, $r_2(w) = 2$ *y* $r_3(w) = 4$. *En consecuencia* $r(w) = 7$.

Por lo tanto el resultado de la elección usando la función de Borda es la alternativa y*, es decir;* $f^B(u, X) = \{y\}$.

En la época de la revolución francesa, es decir, en el Siglo XVIII, Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat,un integrante de la realeza francesa, conocido como el Marqués de Condorcet fue uno de los pioneros en en el estudio de la elección social. Condorcet en 1785 Condorcet publicó el "*Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces*". Allí, se expone la paradoja conocida ahora como *El Dilema de Condorcet* o *La Paradoja de Condorcet*, que muestra una situación de intransitividad en un proceso de elección.
En este orden de ideas presentamos la paradoja de Condorcet a través de una regla de elección que escoge a los *Ganadores de Condorcet*. Veamos su definición formal:

$$\begin{aligned} f(u,V) &= \{x \in V : \; \forall y \in V, \; N(x \succeq_i y) > N(y \succeq_i x)\} \\ &= \{x \in V : \; x \text{ es ganador de Condorcet en } V\}. \end{aligned}$$

$N(x \succeq_i y)$ cuenta el número de veces que x le gana o empata con y respecto a la preferencia del individuo i. Sin embargo, ésta no es una función de elección social como la definimos antes pues se pudiera encontrar una situación donde la elección no pudiera darse. Consideremos el perfil:

$$u = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \\ \succeq_1 & \succeq_2 & \succeq_3 \end{pmatrix}$$

Claramente, el número de veces que la alternativa x le gana a la alternativa y es 2, el número de veces que la alternativa z le gana a la alternativa x es 2 y el número de veces que la alternativa y le gana a la alternativa z también es 2. Esto crea una situación de indecibilidad y es conocida como la *paradoja del voto*. Es decir, $f(u,X)$ no esta definido.

3. ALGUNAS PROPIEDADES CLÁSICAS DE LAS FUNCIONES DE ELECCIÓN SOCIAL

En esta sección enunciaremos ciertas propiedades importantes, estudiadas en la teoría de elección social y el importante teorema de Imposibilidad de Arrow. Estas propiedades pudieran decirse no sólo son *naturales*, sino racionales y deseables. Cinco de estas intervienen en el teorema de imposibilidad de Arrow. Primero comenzaremos por el planteamiento y análisis de diversas propiedades básicas y algunas relaciones entre ellas.

Dominio Estándar (DE) *f es una función total y* $|X| \geq 3$.
Esta propiedad simplemente dice que no existen restricciones sobre el tamaño de los perfiles y la cardinalidad del número de alternativas es mayor a tres, con la condición de que en ambos casos debe ser finito.

Dictador (D) *Existe un individuo $i \in \mathrm{N}$ tal que para cualquier perfil u, para todo x, toda agenda V, si $x \in V$ y $x \succ_i y$ entonces $y \notin f(u,V)$.*
Esencialmente esta propiedad plantea que existe individuo que impone su preferencia de manera excluyente; en otras palabras, las alternativas no preferidas por este individuo no pueden aparecer en el resultado de la elección; no obstante pudiera darse el caso de que una alternativa de sus preferidas tampoco apareciera.

No Dictador (¬D) *Para todo $i \in \mathrm{N}$ existe un perfil u, existe V, con $x \in V$, tales que, existe $y \in V$, con $x \succ_i y$, y $y \in f(u,V)$.*
La propiedad anterior es simplemente la negación de la propiedad del dictador; es decir, ausencia del dictador.

Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI) *f cumple (IAI) si para cualesquiera dos perfiles u, u' y $V \subset X$,*

$$\text{si } u_{|V} = u'_{|V} \; \text{ entonces } f(u,V) = f(u',V).$$

Básicamente, aquí se plantea lo siguiente: si se tienen dos perfiles donde para cada i se tiene $\succeq_{i|_V} = \succeq'_{i|_V}$, entonces el resultado de la elección restringido a la agenda V debe ser el mismo para ambos perfiles.

Esta condición no toma en cuenta el nivel en que se encuentran las alternativas en las entradas de ambos perfiles; es decir, sólo considera las relaciones de preferencias individuales entre lo elementos de V sin importar la estructura total de las entradas de ambos perfiles. Además, es importante resaltar que esta propiedad es pieza fundamental en la demostración del teorema de Arrow. Así, esta propiedad pudiera resultar una de las propiedades más polémicas dentro del estudio de la teoría de la elección social.

Independencia de Caminos (IC) *Para cualesquiera V, S y T agendas y para cualquier perfil u se tiene que:*

$$\textit{si } V = S \cup T \ \textit{ entonces } f(u, V) = f\left(u, f(u, S) \cup f(u, T)\right).$$

Independencia de caminos plantea lo siguiente: si se desea elegir sobre una agenda de candidatos y esta agenda pudiera separarla en dos subagendas de candidatos, entonces elegir sobre la agenda total sería igual que elegir primero sobre las subagendas, unir estos resultados y luego elegir sobre ellos.

Propiedad de Consistencia (α) *Para cualesquiera agendas $V, V' \in \mathcal{P}^*(X)$ y un perfil u, tales que $\forall x$, $V' \subset V$, $x \in V'$ y $x \in f(u, V)$ se tiene $x \in f(u, V')$.*
Podemos ilustrar la propiedad de consistencia en pocas palabras: si una alternativa x resulta ganadora de un grupo de candidatos V, entonces el es el ganador con respecto a cualquier agenda más pequeña que lo contenga.

Explicaciones Transitivas (ET) *Para todo perfil u existe un preorden total $\succeq_u$ tal que para todo V se tiene $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$.*
Particularmente, pudiéramos decir que la propiedad de explicaciones transitivas es la más natural, o racional, dentro de las propiedades de la teoría de elección social. Básicamente, permite que el resultado de la elección pueda ser ordenado a través de un preorden total donde los ganadores de la elección son los maximales con respecto a ese preorden.

Condición Fuerte de Pareto (PF) *Para todo $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y para toda agenda V, si $\forall\ i \in \mathrm{N}$ $x \succeq_i y$, $\exists j \in \mathrm{N}$ $x \succ_j y$, y $x \in V$, entonces $y \notin f(u, V)$.*
La condición de Pareto tiene varias versiones dentro de la literatura de la teoría de elección social. En este articulo consideraremos una versión fuerte y una versión débil y ambas excluyentes; es decir, si unánimemente una alternativa es preferida a otra alternativa, entonces la no preferida no debe aparecer en el resultado de la elección.

Condición Débil de Pareto (PD) *Para todo u y y toda agenda V, si $\forall i \in \mathrm{N}$ $x \succ_i y$ y $x \in V$, entonces $y \notin f(u, V)$.*
La condición débil de Pareto es similar a la condición fuerte de Pareto excepto que las relaciones de preferencias individuales entre las dos alternativas son estrictas, pero la conclusión es la misma, excluye a la alternativa no preferida unánimemente por todos los agentes o individuos del perfil.

Anonimato (A) *Dados dos perfiles u, u' tales que u' es cualquier permutación de u, se tiene que $f(u, V) = f(u', V)$.*

La propiedad de anonimato establece, como su nombre lo indica, que si en un perfil de preferencias individuales las entradas son permutadas, entonces el resultado de la elección no depende de ese reordenamiento, esto es, que el voto de un individuo pudiera estar en cualquier entrada y no afectar el resultado de la elección. Esta propiedad razonable tiene relaciones importantes con otras propiedades.

El teorema de Arrow

Dentro de la teoría de elección social, la paradoja de Arrow o teorema de imposibilidad de Arrow, es considerado uno de los aportes más importantes dentro de este campo. Este teorema fue planteado y demostrado por primera vez por el premio nobel Kenneth Arrow en su tesis doctoral titulada *Social choice and individual values*, y popularizado en su libro, que lleva el mismo nombre, en el año 1951. El artículo donde se publicó por primera vez este resultado lleva por nombre *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*, en agosto de 1950 en *The Journal of Political Economy*. La motivación de este trabajo se debe esencialmente en el estudio de comportamientos de agentes económicos individuales, partiendo de que las relaciones de preferencia son racionales. Por racionalidad se entiende que las relaciones de preferencia sobre los agentes son preordenes totales. Este teorema establece que cuando se tienen tres o más alternativas y un cierto número de votantes no es posible conseguir una función de elección social que permita generalizar las preferencias individuales hacia una *preferencia social* de toda la comunidad, de manera tal, que se cumplan ciertos criterios racionales y valores democráticos. O en términos más sencillos: si una función de elección satisface cuatro propiedades, que parecieran razonables, entonces debe existir un dictador. Presentamos a continuación el Teorema de Imposibilidad de Arrow. La demostración la podemos encontrar en Lehmann y Magidor (1992).

Teorema 1. ***Teorema de Imposibilidad de Arrow*.**
No existe una función de elección social que satisfaga las siguientes propiedades:

1. *Dominio Estandar,*
2. *Pareto Fuerte,*
3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes,*
4. *Explicaciones Transitivas,*
5. *No Dictador.*

El Teorema de Imposibilidad nos dice de manera equivalente que si una función de elección satisface las cuatro primeras condiciones, entonces dicha función posee un dictador.

4. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE ELECCIÓN SOCIAL CON POBLACIÓN VARIABLE

En esta sección introducimos nuevas propiedades en el marco de la teoría de elección social las cuales serán analizadas en la sección siguiente.
Notemos que para las funciones elección social que hemos considerado el dominio es $\mathrm{P}^n \times \mathcal{P}^*(X)$, donde P^n consiste en los perfiles de preferencia de tamaño n. Esto corresponde a una población de n votantes o individuos fijo. Ahora vamos a considerar funciones en donde la población es de tamaño

variable. Para ello sea P el conjunto de todos los preórdenes totales sobre el conjunto de alternativas X. Denotemos por $\mathbf{P} = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{P}^n$, es decir; consideramos perfiles de cualquier tamaño. Ahora las funciones que consideraremos son del tipo

$$f : \mathbf{P} \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X), \text{ tales que } f(u, V) \subseteq V.$$

Estas nuevas funciones se seguirán llamando funciones de elección social por simplemente simplificar, en consecuencia usaremos la misma notación.
Dados dos perfiles $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ y $u' = (\succeq'_1, \cdots, \succeq'_m)$ definimos la **concatenación** entre perfiles como un nuevo perfil de la forma

$$u \odot u' = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n, \succeq'_1, \cdots, \succeq'_m)$$

Note que el tamaño de nuevo perfil $u \odot u'$ es la suma del tamaño de u y u', es decir, $n + m$.

Presentamos a continuación nuevas propiedades en este contexto.

Consistencia Fuerte de Perfiles (CFP). *Una función de elección f satisface CFP sii para todos u_1, u_2 perfiles y toda agenda V se tiene que, si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) = f(u_1 \odot u_2, V)$.*

En palabras sencillas la propiedad CFP establece lo siguiente: si el conjunto de votantes está dividido en dos grupos con sus respectivas preferencias individuales y en cada grupo se hace una elección y en este resultado existen elementos en común, entonces estos elementos en común (ganadores), deberían ser los mismos resultantes de la elección hecha para el grupo en su totalidad.

Consistencia Débil de Perfiles (CDP). *Una función de elección f satisface CDP sii para todos u_1, u_2 perfiles y toda agenda V, si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$.*

Similar a la propiedad CFP, la propiedad CDP establece que el resultado de la intersección de ganadores de los dos grupos de individuos con sus preferencias individuales debe estar al menos contenido dentro del resultado de la elección sobre el grupo total y la del grupo total en la unión del resultado de los subgrupos.

Propiedad K-P (KP). *Dada una función $(u \longmapsto \succeq_u)$ que asocia a cada perfil u un preorden total $\succeq_u$, decimos que esta función satisface la propiedad KP, si:*

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Esta propiedad establece que si se tienen dos grupos de votantes con sus votos (dos perfiles) y con respecto a las preferencias asociadas cada uno de ellos una alternativa x es preferida a otra y, entonces la alternativa x es preferida a una alternativa y, y deben preservar esta relación de preferencia en la relación asociada a la concatenación de estos dos perfiles. En particular, si una de las preferencias de uno de los perfiles es estricta, entonces en la concatenación se preserva esta relación estricta.

Propiedad Débil K-P (KP*). *Dada una función* $(u \longmapsto \succeq_u)$ *que asocia a cada perfil* u *un preorden total* $\succeq_u$*, decimos que esta función satisface la propiedad KP*, si:*

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Esta propiedad es similar a la anterior, excepto que la condición (ii) es más débil, pues requiere en las hipótesis que la relación sea estricta respecto a ambos perfiles.

Las propiedades CFP, CDP, KP KP* aparece por primera vez en los trabajos de S.Konieczny y R. Pino Pérez, en el marco de la fusión lógica, ver Konieczny y Pérez (2002).

Propiedad de la Identidad (PI). *Una función* $(u \longmapsto \succeq_u)$*, satisface PI sii para un perfil* $u = (\succeq_1)$ *(constituido por un solo elemento) se tiene* $\succeq_u = \succeq_1$.
Aunque pareciera trivial, la propiedad PI es indispensable a la hora de obtener algunos resultados; básicamente dice que si un perfil consiste de sólo un orden, entonces el orden global es exactamente el mismo.

Propiedad de Pareto Indiferencia (PPI). Una función de elección social f satisface la Propiedad de Pareto Indiferencia si se cumple la siguiente condición:

$$\forall i \in \mathrm{N}, \quad x \sim_i y \Longrightarrow f(u, \{x, y\}) = \{x, y\}.$$

5. RESULTADOS

En esta sección veremos las interrelaciones entre las propiedades antes mencionadas así como algunas consecuencias de ellas.
La siguiente proposición forma parte del folklore de la teoría de elección social, y esencialmente caracteriza las funciones de elección social que satisfacen la propiedad de explicaciones transitivas.

Proposición 1. *Suponga que una función de elección* f *tiene Explicaciones Transitivas y es total. Para cada perfil* u *definimos* $\succeq_u$ *de la siguiente manera:*

$$x \succeq_u y \Longleftrightarrow x \in f(u, \{x, y\}).$$

entonces $\succeq_u$ *es el único preorden que satisface* $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$.

Demostración. Veamos que es un preorden total. Para esto verifiquemos la transitividad; si $x \succeq_u y$ y $y \succeq_u z$ entonces $x \succeq_u z$. En efecto, $x \succeq_u y$ si y sólo si $x \in f(u, \{x, y\})$ y $y \succeq_u z$ si y sólo si $y \in f(u, \{y, z\})$. Como f tiene Explicaciones Transitivas, para cada u existe un preorden total $\succeq_u'$ tal que para cualquier agenda $V \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que

$$f(u, V) = \max(V, \succeq_u)' \tag{1}$$

Como asumimos que $x \succeq_u y$ y que $y \succeq_u z$ entonces por definición se tiene que $x \in f(u, \{x, y\})$ y $y \in f(u, \{y, z\})$; es decir, usando (1), que $x \succeq'_u y$ y $y \succeq'_u z$. Así, por transitividad de $\succeq'_u$ se tiene que $x \succeq'_u z$. De esto último y de (1) tenemos que $x \in f(u, \{x, z\})$; es decir, $x \succeq_u z$, por definición.

Veamos que la relación es total. En efecto, como f satisface es total entonces $f(u, \{x, y\}) \neq \emptyset$. Luego siempre sucede que $x \in f(u, \{x, y\})$ ó $y \in f(u, \{x, y\})$, es decir, $x \succeq_u y$ ó $y \succeq_u x$.
Veamos ahora que $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$ y que $\succeq_u$ es el único preorden con esta propiedad. Para todo preorden total $\succeq'_u$ tal que $f(u, V) = \max(V, \succeq'_u)$, mostraremos que $\succeq'_u = \succeq_u$. Veamos las dos contenciones:

a.- Como $x \succeq_u y$, $x \in f(u, \{x, y\})$ esto implica que $x \in \max(\{x, y\}, \succeq'_u)$, es decir $x \succeq'_u y$.

b.- Sean $x, y \in V$. Supongamos $x \succeq'_u y$. Queremos ver $x \succeq_u y$. Como $x \succeq'_u y$ se tiene $x \in f(u, \{x, y\})$ y esto implica, por la definición de $\succeq_u$, que $x \succeq_u y$.

∎

La proposición precedente nos permite decir que en presencia de explicaciones transitivas, hay una única función $u \longmapsto \succeq_u$ que determina a f en el sentido de la siguiente ecuación:

$$f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$$

En este caso simplemente diremos que $u \longmapsto \succeq_u$ es la función que determina a f.

Teorema 2. *Sea f una función de elección que satisface Explicaciones Transitivas y sea $u \longmapsto \succeq_u$ la función que determina a f. La función $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP, si, y sólo si, f satisface Consistencia Fuerte de Perfiles.*

Demostración.
($\Longrightarrow$) Supongamos que f cumple con Explicaciones Transitivas y supongamos además que $u \longmapsto \succeq_u$ satisface las propiedades KP.
Queremos ver que f satisface la propiedad de Consistencia Fuerte de Perfiles. Para esto, sean u_1, u_2 perfiles y una agenda $V \subset X$, tales que

$$f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset.$$

Queremos ver que $f(u_1 \odot u_2, V) = f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Demostremos la doble contención:

(a) Veamos que $f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Sea $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$, es decir

$$x \succeq_{u_1 \odot u_2} y, \qquad \forall y \in V \tag{2}$$

Sabemos que $\exists x_0 \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que $x \notin f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, es decir $x \notin f(u_1, V)$ ó $x \notin f(u_2, V)$. Hay dos casos:

(a.1) Supongamos que $x \notin f(u_1, V)$. Como $\succeq_{u_1}$ y $\succeq_{u_2}$ son totales y x_0 es maximal con respecto a ambos, necesariamente

$$x_0 \succeq_{u_1} x \text{ y } x_0 \succeq_{u_2} x$$

pero además $x_0 \succ_{u_1} x$. En efecto basta ver que $x \not\succeq_{u_1} x_0$. De lo contrario, $\forall y \in V$ $x \succeq_{u_1} x_0 \succeq_{u_1} y$. Esto implica que $x \in f(u_1, V)$, lo que es una contradicción.
Así $x_0 \succ_{u_1} x$ y $x_0 \succeq_{u_2} x$, de donde se tiene, usando KP (ii), que $x_0 \succ_{u_1 \odot u_2} x$, lo que contradice el hecho de que ocurre (2).

(a.2) El caso en que $x \notin f(u_2, V)$ es análogo. Usando KP (iii) en vez de KP ii.

(b) Veamos ahora que $f(u_1 \odot u_2, V) \supseteq f(u_1, V) \cap f_{u_2}(V)$. Sea $x \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, es decir

$$x \succeq_{u_1} y \text{ y } x \succeq_{u_2} y \qquad \forall y \in V.$$

Luego por KP (i), se tiene $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y \quad \forall y \in V$. Así $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.

($\Longleftarrow$) Sean u_1, u_2 dos perfiles cualesquiera. Debemos ver que se cumplen:

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$ y,

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

(iii) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Sabemos que f cumple con CFP, es decir; $\forall u_1, u_2 \; \forall V \subseteq X$,

$$[f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset \Longrightarrow f(u_1, V) \cap f(u_2, V) = f(u_1 \odot u_2, V)],$$

Además sabemos que f satisface ET y usando 1, podemos decir que $x \in f(u, \{x, y\}) \iff x \succeq_u y$. Supongamos $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Entonces $x \in f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Por lo tanto $x \in f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Luego por CFP, $x \in f(u_1 \odot u_2, \{x, y\})$, de donde se tiene $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$. Esto prueba (i).
Ahora supongamos $x \succ_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Entonces $x \in f(u_1, \{x, y\})$, $y \notin f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Así, $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Usando CFP se tiene que $f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) = \{x\}$, es decir; $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$. Esto prueba (ii).
La prueba de (iii) es similar.
Así concluimos la demostración del teorema. ∎

Teorema 3. *Sea f una función de elección que satisface Explicaciones Transitivas y sea $u \longmapsto \succeq_u$ la función que determina a f. La función $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP*, si, y sólo si, f satisface Consistencia Débil de Perfiles (CDP).*

Demostración.
($\Longrightarrow$) Supongamos que f satisface ET y que $u \longmapsto \succeq_u$ satisface KP*, es decir

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Debemos ver que si $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$ entonces

$$f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f_{u_1 \odot u_2}(V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$$

Veamos que $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \subseteq f_{u_1 \odot u_2}(V)$. Sea $x \in f(u_1, V) \cap f(u_2, V)$, luego $x \in f(u_1, V)$ y $x \in f(u_2, V)$, esto quiere decir, que para todo $y \in V$, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Luego por KP*(i), se tiene que $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$ para todo $y \in V$. Así $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.

Veamos que $f(u_1 \odot u_2, V) \subseteq f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$. Sea $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$, luego $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y, \ \forall y \in V$. Como $f(u_1, V) \cap f(u_2, V) \neq \emptyset$, se tiene que existe $x_0 \in V$ tal que, para todo $y \in V$, $x_0 \succeq_{u_1} y$ y $x_0 \succeq_{u_2} y$.
Supongamos que $x \notin f(u_1, V) \cup f(u_2, V)$, es decir, $x \notin f(u_1, V)$ y $x \notin f(u_2, V)$, así en particular, x_0 satisface que $x_0 \succ_{u_1} x$ y $x_0 \succ_{u_2} x$. Luego por KP*(ii) $x_0 \succ_{u_1 \odot u_2} x$, lo que contradice el hecho de que $x \in f(u_1 \odot u_2, V)$.
($\Longleftarrow$) Supongamos que la función, $u \longmapsto \succeq_u$, tiene satisface Consistencia Débil de Perfiles.

Sean u_1, u_2 dos perfiles cualesquiera y sea $V = \{x, y\}$. Debemos ver que

(i) Si $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, entonces $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$.

(ii) Si $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$, entonces $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

Como f tiene ET entonces, y en virtud de la Proposición 1, podemos decir que

$$x \in f(u, \{x, y\}) \Longleftrightarrow x \succeq_u y.$$

Así, como $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$, se tiene que $x \in f(u_1, \{x, y\})$ y $x \in f(u_2, \{x, y\})$. Luego $x \in f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Por lo tanto, por CDP, se tiene $x \in f(u_1 \odot u_2, \{x, y\})$, es decir $x \succeq_{u_1 \odot u_2}$.
Como $x \succ_{u_1} y$ y $x \succ_{u_2} y$ se tiene que $\{x\} = f(u_1, \{x, y\})$ y $\{x\} = f(u_2, \{x, y\})$, de donde, $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\})$. Además $\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cup f(u_2, \{x, y\})$. Así, usando CDP podemos decir que

$$\begin{aligned}
\{x\} = f(u_1, \{x, y\}) \cap f(u_2, \{x, y\}) &\subseteq f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) \\
&\subseteq f(u_1, \{x, y\}) \cup f(u_2, \{x, y\}) \\
&= \{x\}
\end{aligned}$$

de donde tenemos que $f(u_1 \odot u_2, \{x, y\}) = \{x\}$, es decir, $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$.

∎

Las siguientes dos proposiciones tienen una prueba inmediata:

Proposición 2. *Si una función f satisface Consistencia Fuerte de Perfiles entonces f satisface la propiedad de Consistencia Débil de Perfiles.*

Proposición 3. *Si una función $(u \longmapsto \succeq_u)$ que asocia a cada perfil u un preorden total $\succeq_u$, satisface KP entonces f satisface la propiedad de KP*.*

Lema 1. *Sea $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ una función que a cada perfil u' asocia un preorden total $\succeq_{u'}$. Supongamos que para cualesquiera $u_1, \ u_2$ perfiles, esta función satisface la propiedad (i) de KP, es decir,*

$$\textit{si } x \succeq_{u_1} y \textit{ y } x \succeq_{u_2} y, \textit{ entonces } x \succeq_{u_1 \odot u_2} y, \tag{1}$$

y además satisface la Propiedad de la Identidad (PI)). Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ tal que $x \succeq_i y$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces $x \succeq_u y$.

Demostración. Aplicamos inducción sobre n. Para $n = 1$ es inmediato en virtud de PI. Supongamos que es cierto para $n = k$, probemos que es cierto para $n = k + 1$.
En efecto. Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k, \succeq_{k+1})$. Consideremos $u_1 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k)$ y $u_2 = (\succeq_{k+1})$. Es claro que $u = u_1 \odot u_2$. Como para $n = k$ y $n = 1$ se satisface el resultado, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$ y $x \succeq_{u_2} y$. Así por (1) se tiene que $x \succeq_{u_1 \odot u_2} y$, es decir, $x \succeq_u y$. ∎
La proposición siguiente formaliza una afirmación hecha en los trabajos de S. Konieczny y R. Pino Pérez Gibbard (1973). Ellos afirmas que la propiedad KP es una generalización de Pareto.

Proposición 4. *Si una función $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad KP y además $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de la Identidad, entonces la función de elección definida por $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de Pareto Fuerte.*

Demostración. Sean $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$, V una agenda, $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil y $\succeq_u$ el preorden total asociado a u. Supongamos las hipótesis de Pareto Fuerte, es decir,

a) $\forall\, i \in \mathrm{N}$, $x \succeq_i y$,

b) $\exists j \in \mathrm{N}$ tal que $x \succ_j y$,

c) $x \in V$.

Consideremos $u_1 = (\succeq_1, \cdots, \succeq_{j-1})$, $u_2 = (\succ_j)$, y $u_3 = (\succeq_{j+1}, \cdots, \succeq_n)$. Es claro que $u = u_1 \odot u_2 \odot u_3$.

Sea f la función determinada por $u \longmapsto \succeq_u$, es decir, $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$. Por el Lema 1, la hipótesis (a) y por definición de u_1, se tiene que $x \succeq_{u_1} y$. Pero además en virtud de PI y por definición de u_2 se tiene que $x \succ_{u_2} y$.
Luego por la Propiedad KP(ii) se tiene que $x \succ_{u_1 \odot u_2} y$. Por otra parte, de nuevo por Lema 1, la hipótesis (a) y por definición de u_3 se tiene que $x \succeq_{u_3} y$, así de nuevo en virtud de la Propiedad KP(ii) se tiene que $x \succ_{u_1 \odot u_2 \odot u_3} y$, es decir, $x \succ_u y$. Luego $y \notin f(u, V)$.
∎

Usando una técnica de prueba similar a la del resultado precedente se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 5. *Si una función $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad KP* y además $\succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de la Identidad, entonces la función de elección determinada por $u' \longmapsto \succeq_{u'}$ satisface la Propiedad de Pareto Débil.*

Se pudiera, a primera vista, pensar que un resultado inmediato sería en siguiente hecho: *Si una función de elección f satisface la propiedad de Pareto Fuerte y Explicaciones Transitivas, entonces f satisface la Propiedad de la Identidad.* Sin embargo, tal afirmación no es cierta. Para ver esto consideremos lo siguiente. Sea $\geq^*$ un orden lineal sobre X. Definamos una función que a un preorden total $\succeq$ le asocia un orden lineal $\succeq^l$, $(\succeq \longmapsto \succeq^l)$, que cumple lo siguiente:

- Si $x \succeq y$, entonces $x \succ^l y$.
- Si $x \sim y$ con $x \neq y$, entonces $x \succ^l y$ si, y sólo si $x >^y *$.

Ahora definimos la función de elección social f determinada por $u \longmapsto \succeq_u$ de manera tal que $\succeq_u = (\succeq_1)^l$. En esta construcción se verifica que f determinada por $u \longmapsto \succeq_u$ cumple ET, PF y D pero claramente no cumple PI.

Proposición 6. *Si una función de elección social satisface PD, ET y PPI, entonces f satisface PI.*

Demostración. Sea $u = (\succeq_1)$ un perfil de un sólo elemento. Como f satisface ET, consideremos la función que determina a f, $u \longmapsto \succeq_u$; es decir, $f(u, V) = \max(V, \succeq_u)$. Queremos ver que $f(u, V) = \max(V, \succeq_1)$; es decir, $x \succeq_1 y \iff x \succeq_u y$. Veamos la doble contención. Supongamos que $x \succeq_1 y$, es decir $x \succ_1 y$ ó $x \sim_1 y$. Si $x \succ_1 y$ entonces por PD se tiene que $y \notin f(u, V)$; es decir, $y \notin \max(V, \succeq_u)$ lo que implica que $x \succ_u y$. Ahora bien, si $x \sim_1 y$, entonces por PPI se tiene que $\{x, y\} = \max(\{x, y\}, \succeq_u)$, lo que implica que $x \sim_u y$. Veamos la otra contención. Supongamos que $x \succeq_u y$ y supongamos que $x \not\succeq_1 y$, es decir que $y \succ_1 x$. Como f satisface PD entonces $x \notin \max(V, \succeq_u)$, lo que contradice el hecho de que $x \succeq_u y$. ∎

6. CONCLUSIONES

Colocamos la puesta en escena de las propiedades clásicas de las funciones de elección social. También, existen propiedades similares con el estudio de otro tipo de mecanismos de elección. Cada propiedad clásica puede ser interpretada en el estudio de los esquemas de voto, que son funciones particulares definidas $g : P^n \longrightarrow X$ como podemos ver en los trabajos Gibbard (1973) y Taylor (2005). Sin embargo, las propiedades nuevas planteadas sólo aparecen en el marco de las funciones de elección social. Mostramos además, el análisis de todas la propiedades y las relaciones entre ellas. Esto es la esencia del trabajo. Por ejemplo, el teorema 2 atrapa la equivalencia entre dos propiedades cuya esencia está en la noción de concatenación de votos lo que permite realizar concatenación de perfiles.

Una tarea interesante es tratar de caracterizar las funciones de elección social que satisfagan estas propiedades. Para ese objetivo ya contamos con el análisis presentado en este trabajo. Como lo dijimos en la introducción, Denis Bouyssou, et al., (ver **?**) muestran algunas funciones de elección que satisfacen propiedades de las que hemos planteado. Sin embargo, existen otras funciones mayoritarias que pudieran ser evaluadas.

Podemos considerar otro tipo de funciones que son conocidas como funciones estructuradas. Veamos un ejemplo con distancias. Sea X un conjunto finito de alternativas y consideremos una distancia entre las alternativas $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{N}$. Podemos extender d a una distancia entre elementos de X y conjuntos formados por elementos de X, de la siguiente manera

$$\begin{gathered} d^* : X \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N} \\ d^*(x, A) = \min_{y \in A}(d(x, y)) \end{gathered}$$

Consideremos la función de elección C^{Σ} definida de la siguiente manera: dado un conjunto A definimos $\mathcal{M}(A)$ como conjunto formado por todos los multiconjuntos cuyos elementos están en A. Por ejemplo si, $A = \{a, b, c\}$, entonces $\{a, a, a, b, b\} \in \mathcal{M}(A)$. Además dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(B)$ denotamos la unión de multiconjuntos por $\mu_1 \sqcup \mu_2$, este es el multiconjunto formado por los elementos que están o bien en μ_1, o bien en μ_2. Por ejemplo, $\{a, b, b\} \sqcup \{b, a\} = \{a, a, b, b, b\}$. Ahora bien, sea la distancia-Σ entre un elemento de X y un multiconjunto de $\mathcal{P}(X)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d^{\Sigma} &: X \times \mathcal{M}\left(\mathcal{P}(X)\right) \longrightarrow \mathbb{N} \\ d^{\Sigma}(x, \mu) &= \sum_{A \in \mu} d^*(x, A) \end{aligned}$$

Luego, dado un perfil $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_k)$ se le puede asociar un elemento $\rho_u \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(X))$, llamado el conjunto de preferencias principales, de la siguiente manera:

$$\rho_u = \{\max(\succeq_1), \cdots, \max(\succeq_k)\} \tag{3}$$

Ahora se define $\succeq_u^{\Sigma}$ asociado a un perfil u:

$$x \succeq_u^{\Sigma} y \Longleftrightarrow d^{\Sigma}(x, \rho_u) \leq d^{\Sigma}(y, \rho_u).$$

Finalmente se puede definir C_u^{Σ} como la regla de elección asociada a $\succeq_u^{\Sigma}$, es decir,

$$C_u^{\Sigma}(V) = \min(V, \succeq_u^{\Sigma}).$$

Es fácil ver que $\succeq_u^{\Sigma}$ es un preorden total. Para aclarar el comportamiento de esta regla veamos el siguiente ejemplo: sea $X = \{x_0, \cdots, x_{15}\}$ dieciséis alternativas y N $= \{1, 2, 3, 4\}$ cuatro votantes. Codifiquemos las alternativas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} x_0 = (0,0,0,0) & x_1 = (0,0,0,1) & x_2 = (0,0,1,0) & x_3 = (0,0,1,1) \\ x_4 = (0,1,0,0) & x_5 = (0,1,0,1) & x_6 = (0,1,1,0) & x_7 = (0,1,1,1) \\ x_8 = (1,0,0,0) & x_9 = (1,0,0,1) & x_{10} = (1,0,1,0) & x_{11} = (1,0,1,1) \\ x_{12} = (1,1,0,0) & x_{13} = (1,1,0,1) & x_{14} = (1,1,1,0) & x_{15} = (1,1,1,1) \end{array}$$

Definamos la siguiente distancia:

$$\begin{aligned} & d : X \times X \longrightarrow \mathbb{N} \\ & d(x_i, x_j) = \text{\# de coordenadas en que difieren } x_j \text{ y } x_i \end{aligned}$$

Esta distancia es llamada distancia de Hamming. Sea $u = (\succeq_1, \succeq_2, \succeq_3, \succeq_4)$, tal que el perfil asociado $\rho_u = \{\max(\succeq_1), \cdots, \max(\succeq_4)\}$ viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \max(\succeq_1) = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0)\} & \max(\succeq_2) = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0)\} \\ \max(\succeq_3) = \{(0,0,0,0)\} & \max(\succeq_4) = \{(0,1,1,0), (1,1,1,0)\} \end{array}$$

Sea la agenda $V = X \setminus \{(0,1,1,0), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0)\}$. Ilustraremos esta situación con la siguiente tabla.

	$\max(\succeq_1)$	$\max(\succeq_2)$	$\max(\succeq_3)$	$\max(\succeq_4)$	d^Σ
(0,0,0,0)	3	3	0	2	8
(0,0,0,1)	3	3	1	3	10
(0,0,1,0)	2	2	1	1	6
(0,0,1,1)	2	2	2	2	8
(0,1,0,0)	2	2	1	1	6
(0,1,0,1)	2	2	2	2	8
(0,1,1,1)	1	1	3	1	6
(1,0,0,0)	2	2	1	2	7
(1,0,0,1)	2	2	2	3	9
(1,0,1,1)	1	1	3	2	7
(1,1,0,1)	1	1	3	2	7
(1,1,1,1)	0	0	4	1	**5**

Es fácil ver que $C_u^\Sigma(V) = (1,1,1,1)$. Este tipo de funciones son muy estudiadas en el marco de la fusión de la información.
Concluimos mostrando el resultado de comportamiento de C^Σ con respecto a las propiedades.

DS	¬D	IAI	IC	α	ET	PF	PD	A	CFP	CDP	KP	KP*	PI
✓	✓	x	✓	✓	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	x

La distintas demostraciones requeridas para llenar la tabla anterior la dejamos para comprobación del lector puesto que, aunque no es trabajo difícil es bastante laborioso. No obstante, es un buen ejercicio y promueve el interés en proponer nuevos mecanismos de elección para luego valorarlo a partir de las propiedades planteadas en este trabajo y otras que pudieran aparecer en la literatura.

7. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

8. REFERENCIAS

Arrow, J. K. (1963). *Social choice and individual values* (Second ed.). New York: Wiley.

Gibbard, A. (1973). *Manipulations of voting schemes: A general result* (Vol. 41). Springer–Verlag.

Kelly, J. S. (1988). *Social choice theory: An introduction*. Springer–Verlag.

Konieczny, S., y Pérez, R. P. (2002). Merging information under constraints: A logical framework. En (Vol. 12 No 5, pp. 773–808). J. Logic Computat, Oxford University Press.

Lehmann, D. J., y Magidor, M. (1992, 1). What does a conditional knowledge base entail? *Artif. Intell.*, *55*, 1–60.

Pino, R. A. (2013). *Matemáticas de las elecciones* (Primera ed.). Venezuela: EMALCA.

Taylor, A. D. (2005). *Social choice and the mathematics of manipulation* (Firts ed.). Cambridge University Press.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Guilber Vergara	Metodología, revisión y búsqueda bibliográfica.
Jahn Leal	Concepción, revisión y redacción.