BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 8, No. 3, Septiembre/Diciembre, 2023, Ecuador (p. 1 -14). Edición continua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí

DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i3.5474

# LA REGLA DE DOMINANCIA PLAUSIBLE EN DECISIONES MÚLTIPLES

**Oscar Fabian Toasa Diaz** [1,2*], **Franklin José Camacho**[3], **Jahn Franklin Leal** [4]
[1]Instituto de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador Email: otoasa7034@utm.edu.ec
[2] Unidad Académica de Formación Técnica y Tecnológica, Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Ecuador
Email: oscar.toasa@uleam.edu.ec
[3]Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, Urcuquí, Ecuador.
Email: fcamacho@yachaytech.edu.ec
[4]Facultad de Ciencias Ambientales y Forestales, Universidad de los Andes. Mérida Venezuela. Email: jleal@ula.ve

*Autor para correspondencia: otoasa7034@utm.edu.ec

Recibido: 15-01-2023/ Aceptado: 01-08-2023/ Publicación: 01-09-2023
Editor Académico: Guelvis Enrique Mata Díaz

Ciencias Matemáticas

## RESUMEN

En este trabajo se trata el problema de las decisiones múltiples o decisión social. Este consiste en considerar un colectivo de individuos que toman decisiones sobre un conjunto de políticas. Se propone un modelo de decisión social; es decir, un modelo que permite establecer una decisión global sobre el colectivo a partir de las decisiones individuales. Se usa una versión de la función de Borda como el mecanismo de agregación y Regla de Dominancia Plausible para ordenar políticas. Se demuestra que este modelo satisface una propiedad de interés en la teoría de elección social conocida como la dominancia estricta de Pareto.

**Palabras clave:** Decisiones múltiples, Dominancia estricta de Pareto, regla de Borda, regla de dominacia plausible.

# THE PLAUSIBLE DOMINANCE RULE IN MULTIPLE DECISIONS

## ABSTRACT

This paper addresses the problem of multiple decisions or social decision. It consists of considering a collective of individuals who make decisions on a set of policies. A social decision model is proposed; that is, a model that makes it possible to establish a global decision on the collective based on individual decisions. A version of the Borda function is used as the aggregation mechanism and the Plausible Dominance Rule is used to order the policies. It is shown that this model satisfies a property of interest in social choice theory known as Pareto strict dominance.

**Keywords:** Multiple decisions, Pareto strict dominance, Borda rule, plausible dominance rule.

# A REGRA DE PROPRIEDADE PLAUSÍVEL EM MÚLTIPLAS DECISÕES


## RESUMO

Este artigo trata do problema das decisões múltiplas ou decisão social. Isso consiste em considerar um grupo de indivíduos que tomam decisões sobre um conjunto de políticas. Propõe-se um modelo de decisão social; ou seja, um modelo que permite estabelecer uma decisão global sobre o coletivo a partir de decisões individuais. Uma versão da função Borda é usada como mecanismo de agregação e regra de dominância plausível para as políticas de ordenação. Mostra-se que este modelo satisfaz uma propriedade de interesse na teoria da escolha social conhecida como dominância estrita de Pareto.


**Palavras chave:** Decisões múltiplas, dominância estrita de Pareto, regra de Borda, regra de dominância plausível.

Citación sugerida: Diaz, F., Camacho, J. Leal F., (2023). La regla de dominancia plausible en decisiones múltiples. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 8, (No. 3), Septiembre/Diciembre, 2023, Ecuador (p. 1 -14). DOI: `https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i3.5474`

# 1. INTRODUCCIÓN

A diario, los seres humanos deben tomar decisiones; eventualmente por costumbre, por un consejo, o porque simplemente es necesario. Casi siempre surge una pregunta ¿será la decisión correcta?. La duda, por más convencido que esté de la decisión tomada, siempre está presente. Esto se debe a dos aspectos fundamentales; por un lado, situaciones que comúnmente pueden ocurrir pero no pueden ser controlables; y por el otro, las consecuencias que se obtienen al tomar una decisión.

Las situaciones que no se pueden controlar se conocen como estados del mundo, tal como se define en Savage (1972). Ese conjunto se denota por $S$. Por otra parte, toda política genera consecuencias y dependen del estado del mundo en que ocurre; así, las consecuencias están formadas por las situaciones que se presentan una vez que se toman las políticas y ocurre cierto estado. Este conjunto se denota por $X$. Una política puede ser vista como un plan de acciones a realizar según el estado del mundo. Para ser más precisos, una política $f$ es una función del conjunto de estados al conjunto de las consecuencias, $f : S \to X$. Uno de los problemas más importantes en la Teoría de decisión es cómo clasificar las políticas. En otras palabras, como definir relaciones binarias, $\succeq$, sobre el conjunto de todas las posibles políticas $X^S$.

Actualmente existen muchos mecanismos para la toma de decisiones individuales, y en gran parte se han estudiado a través de métodos cuantitativos ver Fishburn (1970); Savage (1972). Por ejemplo, el estudio de la utilidad esperada en el marco de la teoría de decisión cuantitativa. Para usar este modelo se necesita una función de probabilidad $p$ sobre los subconjuntos de los estados del mundo (eventos) y una utilidad $u$ sobre las consecuencias. Este modelo consiste en clasificar las políticas o acciones a través de *la esperanza de la utilidad de las consecuencias* de cada política. En otras palabras, de la esperanza de la variable aleatoria que es la composición de la utilidad con la política ($u \circ f$). La esperanza es un promedio ponderado en caso discreto y en el caso continuo es la generalización de esta idea, a través de series o integrales dependiendo de la naturaleza del espacio. Para más detalle de este enfoque, ver Fishburn (1970); Gilboa (2009).

Otro modelo utilizado para la toma de decisiones individuales es *la regla de dominancia plausible*, este tiene un enfoque cualitativo y fue propuesto por Dubois y cols. (1997). Este necesita una relación binaria $\sqsupseteq$ sobre los eventos $\mathcal{P}(S)$ (llamada relación de plausibilidad) y una relación (un preorden total) $\succeq_x$ sobre las consecuencias $X$. Consiste en comparar, a través de la relación de plausibilidad, el conjunto de los estados donde las consecuencias de una política domina a la otra. Este modelo ha sido ampliamente estudiado por Camacho y Pérez (2021); Camacho y Pino Pérez (2011); Camacho y Pérez (2016); Dubois y cols. (2003, 2002), entre otros. Tanto la regla de dominancia plausible como la utilidad esperada son usadas en problemas de toma decisión que involucra a un individuo. Desafortunadamente, cuando el conjunto de estados es finito, el modelo de la utilidad esperada es sensible a pequeños cambios en los parámetros que la define. En Camacho y Pérez (2016) pueden encontrar un ejemplo donde realizando pequeños cambios en la probabilidad o la utilidad, las preferencias de las políticas cambian. Mientras que la regla de dominancia plausible es más robusta en el caso finito.

Cuando se establece un problema de toma de decisiones que involucra a varios individuos, decisiones múltiples, la utilidad esperada ha sido implementada, ver Fishburn (1970); Gilboa (2009), entre otros. El modelo de la regla de dominancia plausible en decisiones múltiples ha sido poco estudiada. Uno de los primeros trabajos en esta dirección fue Leal (2016).

En este trabajo se continua con el trabajo iniciado por Leal (2016), realizando dos aportes: lo primero fue proponer un algoritmo para la regla de dominancia plausible en decisiones múltiples y el segundo

aporte fue demostrar que, bajo ciertas condiciones, la relación obtenida en el algoritmo, satisface la dominancia estricta de Pareto.
Para ser más precisos el algoritmo, dado en la definición 7, suponga que existen $n$ individuos involucrados en la toma de decisiones. Primero, se consideran un perfil sobre los estados del mundo y un perfil sobre las consecuencias. Después, se agrega la información de estos perfiles usando funciones de agregación aditiva en ambos perfiles. Seguidamente, la relación de agregación obtenida, sobre los estados del mundo, se extiende a través de la relación posibilista asociada. Luego, se usa la regla de dominancia plausible. Vale señalar que, la relación obtenida captura la información de los $n$ individuos en un preorden total sobre las políticas y codifica, de cierta manera, la información social.
Cuando se realiza una agregación es deseable que satisfaga alguna de las propiedades de interés en la teoría de elección social. La dominancia estricta de Pareto es una de estas. En el ejemplo 4, de la sección 4, se observa que si el algoritmo usa la función de agregación de Borda por niveles, la relación obtenida por la regla de dominancia plausible no satisface la dominancia estricta de Pareto. Sin embargo, si se usa la función de agregación de Borda por niveles inalcanzables, se cumple la propiedad, obteniendo el resultado principal de este trabajo, ver teorema 1, de la sección 4.

**2. PRELIMINARES**

## 2.1 Relaciones binarias sobre un conjunto

Sea $S$ un conjunto no vacío. Una relación $R$ sobre $S$, es un subconjunto de $S \times S$. Si $(x, y) \in R$, también denotado por $xRy$, se interpreta como “$x$ está relacionado con $y$”. En el caso que “$x$ no esté relacionado con $y$” se denota $x \not R x$. La parte estricta de $R$, denotada por $E$, se define como: $\forall x, y \in S(xEy \Leftrightarrow xRy \,\&\, y \not R x)$. Mientras la parte indiferente de $R$, denotada por $I$, se define como: $\forall x, y \in S(xIy \Leftrightarrow xRy \,\&\, yRx)$. Por lo general, las relaciones serán denotadas por $\succeq$ y la parte estricta e indiferente por $\succ$ y $\sim$, respectivamente. Se agregarán subíndices en caso de ser necesario.
Cuando una relación posee varias propiedades recibe nombres particulares. Una relación $R$ sobre $S$ es un preorden total si es transitivo ($\forall x, y, z \in S[xRy \,\&\, yRz \implies xRz]$) y total ($\forall x \in S,\ xRx$). Una relación $R$ sobre $S$ es un orden lineal si es un preorden total y antisimétrico ($\forall x, y, z \in S[xRy \,\&\, yRx \implies x = y]$). Se denota por $P_s$ al conjunto de todos los preórdenes totales sobre $S$. Un perfil de $S$ de tamaño $n$, es una n-tupla de preórdenes totales de $S$; es decir, $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ con $\succeq_i \in S$. En un perfil de tamaño $n$ se establece la información, de forma ordenada, de $n$ preórdenes totales. Se denota por $P_s^n$ el conjunto de todos los perfiles de $S$ de tamaño $n$.

## 2.2 Funciones de rango y agregaciones

Una función de rango sobre un conjunto $S$ es cualquier función $f : S \to \mathbb{R}$. Una función de rango $f$ define un preorden total $\succeq$ sobre $S$ de la siguiente manera: para todo $x, y \in S$,

$$x \succeq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \tag{1}$$

Cualquier preorden total $\succeq$ que satisface (1), se dice que es representado por la función de rango $f$ o bien que $f$ representa a $\succeq$. A continuación se definen dos tipos de funciones de rango.

**Definición 1.** *Sea $\succeq$ un preorden total sobre $S$. La* **función de rango por niveles** *asociada a $\succeq$, es dada como: para todo $a \in S$*

$$N(a) = n \iff \exists a_1, \ldots, a_n \in S : a_{i+1} \succ a_i \;\&\; a_n = a \tag{2}$$

*Mientras que, la* **función de rango por niveles inalcanzables** *asociada a $\succeq$ es dada como:*

$$I(a) = \begin{cases} 1, & N(a) = 1; \\ 1 + \sum\limits_{x \in U(a)} N(x), & N(a) \neq 1 \end{cases} \tag{3}$$

*donde $U(a) = \{x \in S : N(a) > N(x)\}$ y $N$ es la función de rango por niveles asociada a $\succeq$.*

En el ejemplo 1 se describe un perfil de tamaño 4 y las correspondientes funciones de rango por niveles.

**Ejemplo 1.** *Supongamos que $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Sea $u = (\succeq_s^1, \succeq_s^2, \succeq_s^3, \succeq_s^4)$ un perfil sobre $S$ donde las relaciones $\succeq_s^1$, $\succeq_s^2$, $\succeq_s^3$ y $\succeq_s^4$ sobre $S$ dadas por: $s_4 \succ_s^1 s_2 \sim_s^1 s_1 \succ_s^1 s_3$, $s_3 \succ_s^2 s_1 \succ_s^2 s_4 \succ_s^2 s_2$, $s_3 \succ_s^3 s_1 \sim_s^3 s_2 \succ_s^3 s_4$ y $s_4 \succ_s^4 s_1 \succ_s^4 s_2 \succ_s^4 s_3$; respectivamente. El perfil es representado por:*

$$u = \left( \begin{array}{cccc} & s_3 & & s_4 \\ s_4 & s_1 & s_3 & s_1 \\ s_2 s_1 & s_4 & s_1 s_2 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_4 & s_3 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \succeq_s^1 & \succeq_s^2 & \succeq_s^3 & \succeq_s^4 \end{array} \right) \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ \text{—} \\ \\ \end{array} \tag{4}$$

*En las columnas se describen los preórdenes totales. Las relaciones $\succeq_1$ y $\succeq_3$ son preórdenes totales que no son antisimétricos, obsérvese que existe un nivel con más de un elemento. La relación $\succeq_s^1$ tiene tres niveles: $N^1(s_1) = 2 = N^1(s_2)$, $N^1(s_3) = 1$ y $N^1(s_4) = 3$; es decir, $s_3$ está en el nivel 1, $s_2$ y $s_1$ están en el nivel 2, mientras que $s_4$ en el nivel 3. Por otra parte, la función de rango por niveles inalcanzable $I^1$, está dada por, $I^1(s_1) = 1$, $I^1(s_2) = 1$, $I^1(s_3) = 1$ y $I^1(s_4) = N^1(s_2) + N^1(s_3) + N^1(s_1) = 5$. Las relaciones $\succeq_2$ y $\succeq_4$ son órdenes lineales, hay cuatro niveles y en cada nivel hay un elemento. Para $\succeq_2$, la función por niveles, $N^2$, está dada por: $N^2(s_1) = 3$, $N^2(s_2) = 1$, $N^2(s_3) = 4$ y $N^2(s_4) = 2$; mientras la función de rango por niveles inalcanzable, $I^2$, está dada por: $I^2(s_1) = N^2(s_4) + N^2(s_2) = 2 + 1 = 3$, $I^2(s_2) = 1$, $I^2(s_3) = 6$ y $I^2(s_4) = 1$. En la tabla 1, se describen los valores que tiene cada función de rango por niveles y por niveles inalcanzables en cada elemento del conjunto $S$.*

Una función de agregación sobre $S$, fusiona la información de cualquier perfil de tamaño $n$, en un preorden total sobre $S$. A continuación se definen dos tipos de funciones de agregación usando funciones de rango. Estas son versiones de la conocida función de agregación de Borda, ver Martínez Panero y cols. (2004).

**Definición 2.** *Sea $S$ y $u = (\succeq_s^1, \cdots, \succeq_s^n) \in P_S^n$. Si $f_u^i$ es una función de rango que representa a $\succeq_s^i$, entonces la función $F_u$, dada por: para todo $x \in S$,*

$$F_u(x) = \sum_{i=1}^{n} f_u^i(x) \tag{5}$$

*se conoce como* ***función de agregación aditiva***. *En particular,*

Tabla 1. Las funciones de rango $N^i$ e $I^i$ para cada individuo $i$, Borda $B$ y Borda Inalcanzable $B_I$

| | $N^1$ | $N^2$ | $N^3$ | $N^4$ | $B$ | $I^1$ | $I^2$ | $I^3$ | $I^4$ | $B_I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 2 | 3 | 2 | 3 | 10 | 1 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| $s_2$ | 2 | 1 | 2 | 2 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| $s_3$ | 1 | 4 | 3 | 1 | 9 | 1 | 6 | 5 | 1 | 13 |
| $s_4$ | 3 | 2 | 1 | 4 | 10 | 5 | 1 | 1 | 6 | 13 |

1. *Si $f_u^i$ es la función de rango por niveles asociada a $\succeq_i$, entonces $F_u$, dada como en* (5)*, se conoce como la* ***función de Borda****.*

2. *Si $f_u^i$ es la función de rango por niveles inalcanzable asociada a $\succeq_i$, entonces $F_u$, definida como en* (5)*, se conoce como la* ***función de Borda inalcanzable****.*

**Observación 1.** *A partir del perfil $u$ en $P_S^n$ y una función de agregación aditiva $F_u$ sobre $S$, se establece una relación de agregación, $\succeq_F$, definida según* (1)*; es decir, $\forall x, y \in S$, $x \succeq_F y \Leftrightarrow F(x) \geq F(y)$.*

En lo que sigue, se denota con $B$ la función de Borda, mientras que $B_I$ la función de Borda inalcanzable. En el ejemplo 1, para el perfil $u$, el elemento $s_4$ se encuentra en el nivel 3 para $\succeq_1$; en el nivel 2 para $\succeq_2$; en el nivel 1 para los preórdenes $\succeq_3$ y para $\succeq_4$ en el nivel 4. Luego, $s_4$ tiene asociado el número $B(s_4) = N^1(s_4) + N^2(s_4) + N^3(s_4) + N^4(s_4) = 3 + 2 + 1 + 4 = 10$ (ver Tabla 1). A partir de los niveles, $N^i$, se tiene que $B(s_1) = 10$, $B(s_2) = 7$ y $B(s_3) = 9$. Luego,

$$s_4 \sim_B s_1 \succ_B s_3 \succ_B s_2.$$

De igual manera, en el mismo ejemplo 1, para la función de Borda inalcanzable $B_I$ y el perfil $u$ se tiene que: para $s_1$, $B_I(s_1) = I^1(s_1) + I^2(s_1) + I^3(s_1) + I^4(s_1) = 1 + 3 + 1 + 3 = 8$; mientras que, $B_I(s_2) = 4$, $B_I(s_3) = 13$ y $B_I(s_4) = 13$. De manera que,

$$s_4 \sim_{B_I} s_3 \succ_{B_I} s_1 \succ_{B_I} s_2.$$

## 2.3 La dominancia estricta de Pareto

Una de las propiedades más importante en la teoría de elección social es la dominancia de Pareto. Esta propiedad tiene varias versiones, ver Kitzberger (2003). Una de estas, es la dominancia estricta de Pareto, en el contexto que de este trabajo se establece que: "si todos los individuos establecen que un elemento es *mejor estrictamente* que otro, entonces esta preferencia debería mantenerse en el resultado global de la decisión". Formalmente.

**Definición 3.** *Sea $u = (\succeq_1, \cdots, \succeq_n)$ un perfil sobre $S$ y sea $\succeq$ una agregación a partir de $u$. Se dice que $\succeq$ satisface* **la dominancia estricta de Pareto** *si: para todo $i$ y para todo par $a, b \in S$, se tiene que:*

$$a \succ_i b \rightarrow a \succ b$$

*donde $\succ_i$ y $\succ$ son la parte estricta de $\succeq_i$ y $\succeq$, respectivamente.*

ISSN 2588-0764

## 2.4 Levantamiento Posibilista

Un evento de $S$ es cualquier subconjunto de $S$. Sea $\mathcal{P}(S) = \{A : A \in S\}$ el conjunto de todos los eventos de $S$. Se denota con $\sqsupseteq$ una relación sobre $\mathcal{P}(S)$, agregando subíndices o supraíndices cuando sea necesario. Cuando este tipo de relaciones son utilizadas para establecer la incertidumbre sobre $S$, se conocen como relaciones de *plausibilidad sobre los eventos de $S$. Existen distintos tipos de relaciones de plausibilidad sobre $\mathcal{P}(S)$. Un clase importante son aquellas que preservan a una relación $\succeq$ fija sobre $S$. Esta clase de relaciones se conocen como levantamientos de $\succeq$. A continuación la definición formal.*

**Definición 4.** *Sean $\succeq$ y $\sqsupseteq$ relaciones sobre $S$ y $\mathcal{P}(S)$, respectivamente. Se dice que $\sqsupseteq$ es un levantamiento de $\succeq$ si $\forall x, y \in S$,*

$$x \succeq y \iff \{x\} \sqsupseteq \{y\}.$$

*Existen distintas maneras de establecer levantamientos dado un preorden total. Para profundizar en este tema, ver Barberà y cols. (2004). A continuación se define el levantamiento posibilista.*

**Definición 5.** *Si es $\succeq$ un preorden total sobre $S$, el* **levantamiento posibilista** *asociado a $\succeq$, denotado por $\sqsupseteq$, es dado como: $\forall A, B \in \mathcal{P}(S)$*

$$A \sqsupseteq B \iff \forall b \in B,\ \exists a \in A : a \succeq b.$$

*Para una buena revisión sobre las relaciones posibilistas ver Barberà y cols. (2004); Camacho y Pérez (2016);* **?**.

### 3. TOMA DE DECISIONES A TRAVÉS DE LA REGLA DE DOMINANCIA PLAUSIBLE

## 3.1 Estados, consecuencias y políticas

*Un individuo, al momento de tomar una decisión, se enfrenta a tres aspectos: los estados del mundo, las consecuencias de las decisiones y las políticas o acciones que toma. Los estados del mundo , o simplemente estados, son las situaciones que pueden ocurrir, en un momento determinado, y el individuo no puede controlar la ocurrencia de estos. Se denota con $S$ y se asume que es finito. En lo que sigue, $(S, \succeq_s)$, establece que $S$ está dotado del preorden total $\succeq_s$, donde $\succeq_s$ describe la forma subjetiva con la que el usuario clasifica a $S$.*

*Las consecuencias son todas las situaciones que pueden ocurrir cuando se realiza una acción en un estado determinado. Este conjunto es denotado por $X$. El individuo, establece las preferencias que tiene sobre las consecuencias a través de un preorden total $\succeq_x$. Esta situación se denota con $(X, \succeq_x)$. Finalmente, una política o acción $f$ es una función del conjunto de estado $S$ al conjunto de las consecuencias $X$; es decir, $f : S \to X$. Si $X^S = \{f | f : S \to X\}$ es el conjunto de todas las políticas, entonces $(X^S, \trianglerighteq)$ describe que $X^S$ es dotado de una relación $\trianglerighteq$. Para $f, g \in X^S$, $f \trianglerighteq g$ expresa que $f$ es mejor o indiferente a $g$.*

*En resumen, en la toma de decisión están involucrados tres ambientes y cada uno dotado de una relación binaria: los estados del mundo $(S, \succeq_s)$, las consecuencias $(X, \succeq_x)$ y las políticas $(X^S, \trianglerighteq)$.*

## 3.2 Regla de Dominancia Plausible

*La regla de dominancia plausible (RDP) propuesta por Dubois y cols. (2002), con el nombre de regla de levantamiento postula que: una política $f$ es mejor que una política $g$, si y solo si, el conjunto de estados donde $f$ domina a $g$ es más plausible que el conjunto de estados donde $g$ domina a $f$.Formalmente,*

**Definición 6.** *Dados $(S, \succeq_s)$ y $(X, \succeq_x)$. La relación $\trianglerighteq$ sobre $X^S$ es dada a través de the simple plausible dominance rule, denoted by $\trianglerighteq = RDP(\succeq_x, \sqsupseteq)$, de la siguiente manera $\forall f,\ g\ \in X^S$:*

$$f \trianglerighteq g \Leftrightarrow [f \succ_x g] \sqsupseteq [g \succ_x f] \tag{6}$$

*donde $[f \succ_x g] = \{s \in S : f(s) \succ_x g(s)\}$ con $\succ_x$ es la parte estricta de $\succeq_x$ y $\sqsupseteq$ es un levantamiento posibilista de $\succeq_s$.*

*En la definición 6, la relación $\sqsupseteq$ pudiera ser cualquier relación binaria sobre $\mathcal{P}(S)$; sin embargo, en este trabajo solo se considera el levantamiento posibilista asociado a $\succeq_s$. El conjunto $[f \succ_x g]$ se conoce como el conjunto donde $f$ domina a $g$ y está formado por todos los estados donde las consecuencias de $f$ son preferidas estrictamente que las consecuencias de $g$.*

**Observación 2.** *Para comparar dos funciones $f, g$ usando la definición 6, se tienen como datos $(S, \succeq_s)$ y $(X, \succeq_x)$. El procedimiento se resume en los siguientes pasos:*

1. *Se construyen los conjuntos dominantes: $[f \succ_x g]$ y $[g \succ_x f]$.*
2. *Se comparan $[f \succ_x g]$ y $[g \succ_x f]$ a través de $\sqsupseteq$, la relación posibilista asociada a $\succeq_s$, según la definición 5.*
3. *A partir de la ecuación* (6)*, se determina si $f \trianglerighteq g$ o bien $g \trianglerighteq f$.*

**Ejemplo 2.** *Considere un problema de toma de decisión donde $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Suponga que un individuo desea tomar una decisión tomando en cuenta que:*

- *Para $(S, \succeq_s)$, la clasificación de los estados del mundo, están dadas por $s_4 \succ_s s_2 \sim_s s_1 \succ_s s_3$, similar a $\succeq_s^1$ del ejemplo 1;*
- *Para $(X, \succeq_x)$ el individuo clasifica las consecuencias a través del siguiente preorden total: $x_3 \succ_x x_4 \succ_x x_2 \succ_x x_1$;*
- *Se considera el levantamiento posibilita $\sqsupseteq$ asociado a $\succeq_s$.*

*Sean $f, g \in X^S$ dos políticas definida como:*

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ |
| $g$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ |

*Para $f$ y $g$ los conjuntos dominantes están dados por $A = [f \succ_x g] = \{s \in S : f(s) \succ_x g(s)\} = \{s_1, s_4\}$ y $B = [g \succ_x f] = \{s_2, s_3\}$. Como $s_4 \succ_s s_i$ para todo $s_i \in B$, entonces $A \sqsupset B$. Luego, $f \vartriangleright g$.*

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ISSN 2588-0764

### 3.3 Regla de dominancia plausible múltiple

*En esta sección se propone una metodología para usar la regla de dominancia plausible cuando en un problema de toma de decisión se encuentran involucrados varios individuos o agentes. Suponga que $n$ individuos desean tomar una decisión bajo el mismo conjunto de estados $S$ y el mismo conjunto de consecuencias $X$. Es decir, cada individuo establece un preorden total, $\succeq_s^i$, sobre $S$ y otro, $\succeq_x^i$, sobre $X$.*

**Definición 7 (Algoritmo 1: Agregación de preferencia individuales).** *Sean $f, g \in X^S$, las políticas a comparar.*

*Paso 1.* *Considere $u_s = (\succeq_s^1, \succeq_s^2, \cdots, \succeq_s^n)$ y $u_x = (\succeq_x^1, \succeq_x^2, \cdots, \succeq_x^n)$ perfiles sobre $S$ y $X$, respectivamente.*

*Paso 2.* *Para $u_s$ se selecciona una función de agregación aditiva, construyendo un preorden total $\succeq_{u_s}$ sobre $S$ según la expresión* (1). *Es decir, se obtiene $(S, \succeq_{u_s})$.*

*Paso 3.* *Para $u_x$ se selecciona una función de agregación aditiva, construyendo un preorden total $\succeq_{u_x}$ sobre $X$ según la expresión* (1). *Es decir, se obtiene $(X, \succeq_{u_x})$.*

*Paso 4.* *Se compara $f$ y $g$ usando la definición 6. Ver observación 2.*

*En el siguiente ejemplo se muestra como funciona el algoritmo para un problema de toma de decisión que involucra a cuatro individuos.*

**Ejemplo 3.** *Considere el conjunto de estados $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y el conjunto de consecuencia $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Se suponen cuatro individuos, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Para cada $i \in N$, se describen las relaciones $\succeq_s^i$ y $\succeq_x^i$, sobre $S$ y $X$ respectivamente:*

$$\begin{pmatrix} & x_3 \\ s_4 & x_4 \\ s_2 s_1 & x_2 \\ s_3 & x_1 \\ \text{—} & \text{—} \\ \succeq_s^1 & \succeq_x^1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_3 & x_2 \\ s_1 & x_1 \\ s_4 & x_3 \\ s_2 & x_4 \\ \text{—} & \text{—} \\ \succeq_s^2 & \succeq_x^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & x_1 \\ s_3 & x_3 \\ s_1 s_2 & x_4 \\ s_4 & x_2 \\ \text{—} & \text{—} \\ \succeq_s^3 & \succeq_x^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_4 & x_4 \\ s_1 & x_2 \\ s_2 & x_3 \\ s_3 & x_1 \\ \text{—} & \text{—} \\ \succeq_s^4 & \succeq_x^4 \end{pmatrix} 4$$

*Suponga que se desea comparar las políticas $f, g \in X^S$ dadas de la siguiente manera en la tabla 2:*

Tabla 2.

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ |
| $g$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ |

*Con la finalidad de comparar las políticas $f$ y $g$ tomando en cuenta las preferencias de los cuatro individuos, se describen los pasos de la definición 7 a continuación:*

*Paso 1. Considere los perfiles*

$$u_s = \begin{pmatrix} & s_3 & & s_4 \\ s_4 & s_1 & s_3 & s_1 \\ s_2 s_1 & s_4 & s_1 s_2 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_4 & s_3 \\ — & — & — & — \\ \succeq_s^1 & \succeq_s^2 & \succeq_s^3 & \succeq_s^4 \end{pmatrix} \qquad u_x = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \\ x_4 & x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_4 & x_2 & x_1 \\ — & — & — & — \\ \succeq_x^1 & \succeq_x^2 & \succeq_x^3 & \succeq_x^4 \end{pmatrix}$$

*Paso 2. Considere la función de Borda $B_s$ para $u_s$. Como el perfil $u_s$ fue considerado en el ejemplo 1, a partir de la tabla 1, se tiene que $B_s(s_4) = B_s(s_1) = 10$, $B_s(s_3) = 9$ y $B_s(s_2) = 7$. Por la ecuación* (1)*,*

$$\begin{array}{c} s_4 s_1 \\ s_3 \\ s_2 \\ — \\ \succeq_{u_s} \end{array}$$

*Paso 3. Para $u_x$ considere la función de Borda $B_x$. Se tiene que $B_x(x_1) = 1 + 3 + 4 + 1 = 9$, $B_x(x_2) = 2+4+1+3 = 10$, $B_x(x_3) = 4+2+3+2 = 11$ y $B_x(x_4) = 3+1+2+4 = 10$. Así, por la ecuación* (1)*,*

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 x_2 \\ x_1 \\ — \\ \succeq_{u_x} \end{array}$$

*Paso 4. Según la observación 2:*

- *Determinar los conjuntos dominantes: $A = [f \succ_x g] = \{s \in S : f(s) \succ_x g(s)\} = \{s_3, s_4\}$ y $B = [g \succ_x f] = \{s_1, s_2\}$.*
- *Usando la relación posibilista asociada a $\succeq_{u_s}$, se tiene que $A \backsimeq B$, debido a que $s_1 \in B$ y $s_4 \sim_{u_s} s_1$.*
- *Finalmente, por la definición 6, $f \backsimeq g$.*

*En este caso, la política $f$ es indiferente a la política $g$.*

## 4. LA DOMINANCIA ESTRICTA DE PARETO Y LA REGLA DE DOMINANCIA PLAUSIBLE MÚLTIPLE

*Sean un perfil $u_s = (\succeq_s^1, \succeq_s^2, \cdots, \succeq_s^n)$ sobre $S$ y un perfil $u_x = (\succeq_x^1, \succeq_x^2, \cdots, \succeq_x^n)$ sobre $X$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ sea $\trianglerighteq_i = RDP(\succeq_x^i, \sqsupseteq^i)$ donde $\sqsupseteq^i$ es el levantamiento posibilista asociado a $\succeq_s^i$. Considere $\trianglerighteq$ la relación de agregación obtenida según el algoritmo de la definición 7. En el siguiente ejemplo se muestra que, si la función de agregación en el algoritmo es la función de rango de Borda, entonces $\trianglerighteq$ no satisface la dominancia estricta de Pareto.*

**Ejemplo 4.** *Considere $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $S$, $X$, $\succeq_s^i$, $\succeq_x^i$ y las políticas $f$ y $g$ como en el ejemplo 3. Para cada $i \in N$, se compara $f$ y $g$ con $\trianglerighteq_i = RDP(\succeq_x^i, \sqsupseteq_i)$. Si $i = 1$, la relación $\succeq_x^1$ está dada por: $x_3 \succ_x^1 x_4 \succ_x^1 x_2 \succ_x^1 x_1$. Los conjuntos dominantes están dados por: $A_1 = [f \succ_x^1 g] = \{s_3, s_4\}$ y $B_1 = [g \succ_x^1 f] = \{s_1, s_2\}$. Como $s_4 \succ_s^1 s$ para todo $s \in B_1$, entonces $A_1 \sqsupset_1 B_1$. Por la definición 6, $f \vartriangleright_1 g$. Para $i = 2$, $x_2 \succ_x^2 x_4 \succ_x^2 x_3 \succ_x^2 x_4$, entonces $A_2 = [f \succ_x^2 g] = \{s_3, s_4\}$ y $B_2 = [g \succ_x^1 f] = \{s_1, s_2\}$. Luego, $f \vartriangleright_2 g$. Cuando $i = 3$, $x_1 \succ_x^3 x_3 \succ_x^3 x_4 \succ_x^3 x_2$. Los conjuntos dominantes están dados por $A_3 = [f \succ_x^3 g] = \{s_2, s_3\}$ y $B_3 = [g \succ_x^1 f] = \{s_1, s_4\}$, de manera que $f \vartriangleright_3 g$. Finalmente, si $i = 4$, las consecuencias están ordenadas como: $x_4 \succ_x^4 x_2 \succ_x^4 x_3 \succ_x^4 x_1$. De manera que, $A_4 = [f \succ_x^4 g] = \{s_1, s_4\}$ y $B_4 = [g \succ_x^1 f] = \{s_2, s_3\}$. Así, $f \vartriangleright_4 g$. Teniendo que para todo $i \in N$, $f \vartriangleright_i g$. Sin embargo, por el ejemplo 3, usando la función de agregación de Borda, $f \simeq g$. Luego, $\trianglerighteq$ no satisface la dominancia estricta de Pareto.*

*A continuación se demuestra el resultado principal de este trabajo. El teorema establece que si se considera la función de agregación de Borda inalcanzable y todos los individuos clasifican de igual manera a las consecuencias, entonces la relación obtenida por la regla de dominancia plausible múltiple satisface la dominancia estricta de Paréto.*

**Teorema 1.** *Sean $u_s = (\succeq_s^1, \cdots, \succeq_s^n) \in \mathrm{P}_s^n$ y $u_x = (\succeq_x^1, \cdots, \succeq_x^n) \in \mathrm{P}_x^n$. Suponga que: Para todo $i \in N = \{1, \cdots, n\}$,*

1. *$\succeq_x^i = \succeq_x$ donde $\succeq_x$ es un preorden total sobre $X$;*
2. *$\sqsupseteq^i$ es el levantamiento posibilista asociado a $\succeq_s^i$;*
3. *$\trianglerighteq_i = RDP(\succeq_x, \sqsupseteq^i)$;*
4. *$\succeq_s$ es la relación de agregación obtenida para la función de Borda inalcanzable asociada a $u_s$;*
5. *$\sqsupseteq$ es el levantamiento posibilista asociado a $\succeq_s$;*
6. *$\trianglerighteq = RDP(\succeq_x, \sqsupseteq)$.*

*Si $f \vartriangleright_i g$ para todo $i \in N$, entonces $f \vartriangleright g$, donde $\vartriangleright_i$ y $\vartriangleright$ son la parte estricta de $\trianglerighteq_i$ y $\trianglerighteq$, respectivamente.*

**Demostración 1.** *Sean $f, g \in X^S$ tales que $f \vartriangleright_i g$ para todo $i \in N$. Se quiere demostrar que $f \vartriangleright g$. Por la definición 6,*

$$f \vartriangleright g \Leftrightarrow A = [f \succ_x g] \sqsupset [g \succ_x f] = B$$

*donde $\sqsupset$ es la parte estricta de $\sqsupseteq$. Por la definición 5,*

$$f \vartriangleright g \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a^* \in A : a^* \succ_s b$$

*donde $\succ_s$ es la parte estricta de $\succeq_s$. Como $\succeq_s$ es la relación de agregación que se obtiene usando la función de Borda inalcanzable para $u_s$, por la definición 2, se tiene que*

$$f \vartriangleright g \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a^* \in A : B_I(a^*) > B_I(b) \tag{7}$$

*Así, para demostrar que $f \vartriangleright g$ basta con demostrar la parte derecha o recíproco de la expresión* (7).

*Como para cada $i \in N$, $f \trianglerighteq_i g$, por la definición 6, el hecho que $\succeq_x^i = \succeq_x$ y las definiciones 5 y 2, se tiene que:*

$$\begin{aligned} f \rhd_i g &\Leftrightarrow [f \succ_x^i g] \sqsupset^i [g \succ_x^i f] \\ &\Leftrightarrow A = [f \succ_x g] \sqsupset^i [g \succ_x f] = B \\ &\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a_i \in A : a_i \succ_s^i b \\ &\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a_i \in A : N^i(a_i) > N^i(b) \end{aligned}$$

*donde $N^i$ es la función de rango por niveles asociada a $\succeq_s^i$. Así,*

$$f \rhd_i g \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a_i \in A : N^i(a_i) > N^i(b). \tag{8}$$

*Ahora bien, como $B$ es finito, sea $b^* \in B$ tal que*

$$B_I(b^*) \geq B_I(b), \quad \forall b \in B. \tag{9}$$

*Para cada $i \in N$ y $x \in S$, considere*

$$U_i(x) = \{s \in S : N^i(x) > N^i(s)\}.$$

*Note que, para cada $a_i$ encontrado en* (8)*, se tiene que*

$$U_i(b^*) \subseteq U_i(a_i).$$

*En efecto, si $s \in U_i(b^*)$, entonces $N^i(s) < N^i(b^*)$. Por otro lado, por la ecuación* (8)*, $N^i(a_i) > N^i(b^*)$. De manera que, $N^i(a_i) > N^i(s)$. Así, $s \in U_i(a_i)$. De manera que,*

$$\sum_{s \in U_i(a_i)} N^i(s) > \sum_{s \in U_i(b^*)} N^i(s) \tag{10}$$

*Como* (10) *es cierta, para cada $a_i$ encontrada en* (8)*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s \in U_i(a_i)} N^i(s) > \sum_{i=1}^{n} \sum_{s \in U_i(b^*)} N^i(s) \quad \Leftrightarrow \quad B_I(a_i) = \sum_{i=1}^{n} I(a_i) > \sum_{i=1}^{n} I(b^*) = B_I(b^*).$$

*Tomando $a^*$ como $a_i$ de los obtenidos en* (8)*, se tiene que*

$$B_I(a^*) > B_I(b^*)$$

*pero, por* (9)

$$B_I(a^*) > B_I(b), \quad \forall b \in B \tag{11}$$

*Así, se cumple la parte derecha de* (7)*. Luego, $f \rhd g$.*

## 5. CONCLUSIONES

*En un problema de decisiones múltiples, la regla de dominancia plausible puede ser implementada obteniendo la propiedad de dominancia estricta de Pareto, siempre que:*

1. *Todos los individuos consideren los mismos estados del mundo $S$ y conjunto de consecuencias $X$;*
2. *las consecuencias sean igualmente clasificadas para todos los individuos, es decir, $\succeq_x^i = \succeq_x$;*
3. *El perfil sobre los estados del mundo es agregado a partir de la función de agregación de Borda inalcanzable.*

*Si se considera la función de agregación de Borda, la dominancia estricta de Pareto no se cumple.*

## 6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

*Los autores declaran no tener conflicto de intereses.*

## 7. AGRADECIMIENTOS

*Se agradece al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Yachay Tech ya que ha financiado parcialmente este trabajo a través del proyecto Bienestar Social y Justicia en la Toma de Decisiones código MATH22-04.*

## 8. REFERENCIAS

*Barberà, S., Bossert, W., y Pattanaik, P. K. (2004). Ranking sets of objects. En* Handbook of utility theory *(pp. 893–977). Springer.*

*Camacho, F., y Pérez, R. P. (2021). Decision-making through dominance plausible rule: New characterizations.* Mathematical Social Sciences*,* 113*, 107–115.*

*Camacho, F., y Pino Pérez, R. (2011). Dominance plausible rule and transitivity.* Journal of Applied Non-Classical Logics*,* 21*(3-4), 355–373.*

*Camacho, F., y Pérez, R. P. (2016).* Racionalidad en las desiciones cualitstivas*. Universidad de los Andes.*

*Dubois, D., Fargier, H., y Perny, P. (2003). Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: An axiomatic approach.* Artificial Intelligence*,* 148*(1-2), 219–260.*

*Dubois, D., Fargier, H., y Prade, H. (1997). Decision-making under ordinal preferences and comparative uncertainty. En (p. 157–164). San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc.*

*Dubois, D., Fargier, H., Prade, H., y Perny, P. (2002). Qualitative decision theory: from savage's axioms to nonmonotonic reasoning.* Journal of the ACM (JACM)*, 49(4), 455–495.*

*Fishburn, P. C. (1970).* Utility theory for decision making *(Inf. Téc.). Research analysis corp McLean VA.*

*Gilboa, I. (2009).* Theory of decision under uncertainty *(Vol. 45). Cambridge university press.*

*Kitzberger, P. (2003). La concepción de la política en la obra de vilfredo pareto.*

*Leal, J. (2016).* Tesis de doctorado: Teoría de elección social y decisiones múltiples*. Universidad de los Andes.*

*Martínez Panero, M., y cols. (2004). Generalizaciones y extensiones de la regla de votación de borda.*

*Savage, L. J. (1972).* The foundations of statistics*. Courier Corporation.*

## CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

| **Autor** | **Contribución** |
|---|---|
| Oscar Fabian Toasa Diaz | Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo. |
| Franklin José Camacho | Análisis, revisión y redacción. |
| Jahn Franklin | Concepción, análisis, revisión y redacción. |