UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Ciencias Matemáticas

ESPIRAL DE MULTIPLICACIÓN DE TESLA, SECUENCIA DE RAÍZ DIGITAL TESLA-ZOLLNER, Y SU RELACIÓN CON LOS NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

TESLA MULTIPLICATION SPIRAL, TESLA-ZOLLNER DIGITAL ROOT SEQUENCE, AND THEIR RELATION TO PRIMES AND COMPOSITES

TESLA MULTIPLICATION SPIRAL, TESLA-ZOLLNER DIGITAL ROOT SEQUENCE, AND THEIR RELATION TO PRIMES AND COMPOSITES

Autores:

Tobías Rosas Soto[1,*]

Zollner I. Castellano[2]

[1]Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Maracaibo, Zulia, Venezuela.

[2]Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada Nacional Bolivariana (UNEFA). Valencia, Carabobo, Venezuela.

* Autor para correspondencia.

Editor Académico

Oswaldo José Larreal Barreto

Citación sugerida: Rosas T., Castellano Z. (2024). ESPIRAL DE MULTIPLICACIÓN DE TESLA, SECUENCIA DE RAÍZ DIGITAL TESLA-ZOLLNER, Y SU RELACIÓN CON LOS NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS. Revista Bases de la Ciencia, 9(2), 14-24. DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v9i2.6693

Recibido: 12/05/2024
Aceptado: 15/08/2024
Publicado: 20/08/2024

Resumen

En este trabajo se busca establecer, a través de una demostración formal, que la raíz digital de un número natural n, en base decimal, está dada por el residuo de la división de n entre 9, salvo en el caso donde $9|n$, cuya raíz digital es 9. De esto se puede deducir que la raíz digital de un número k está comprendida entre los números 1 y 9, con ello la presente investigación permite demostrar el *Transposicionamiento* basado en el *Mapa Espiral de Multiplicación de Tesla (MEMT)*, publicado en 1912 y en la publicación digital "Nikola Tesla, conoce su mapa de Multiplicación", junto con la optimización de las *Secuencias de Raíz Digital* ($6k\pm1$), muestra un orden relativo dentro del estudio de los números primos, logrando definir la *Franja Real de Números Primos (FRNP)* dentro del universo de los números enteros naturales. De tal forma, se puede considerar un patrón secuencial para determinar los factores que conforman un número compuesto, pudiendo representar y establecer la *Secuencia de Raíz Digital Tesla Zollner* (*$STZR_d$*) a saber $(741 - 528 - 396)$.

Palabras clave: Raíz digital numérica, secuencia, transposicionamiento, números primos.

Abstract

In this work we seek to establish, through a formal demonstration, that the digital root of a natural number n, in decimal base, is given by the remainder of the division of n by 9, except in the case where $9|n$ whose digital root is 9. From this we can deduce that the digital root of a number k is between the numbers 1 and 9, with this the present investigation allows to demonstrate the *Transpositioning* based on the *Tesla Spiral Multiplication Map (MEMT)*, published in 1912 and in the digital publication "Nikola Tesla, knows his Multiplication Map", together with the optimization of the *Digital Root Sequences* $(6k \pm 1)$, shows a relative order within the study of prime numbers, managing to define the *Real Strip of Prime Numbers* (FRNP) within the universe of natural integers. In this way, a sequential pattern can be considered to determine the factors that make up a composite number, being able to represent and establish the *Tesla Zollner Digital Root Sequence* $(STZR_d)$ namely $(741 - 528 - 396)$.

Keywords: Numerical digital root, sequence, transposition, prime numbers.

Resumo

Neste trabalho procuramos estabelecer, através de uma demonstração formal, que a raiz digital de um número natural n, em base decimal, é dada pelo resto da divisão de n por 9, exceto no caso em que $9|n$ cuja raiz digital é 9. Disto pode-se deduzir que a raiz digital de um número k está entre os números 1 e 9, com isso a presente investigação nos permite demonstrar a *Transposição baseada no Tesla Multiplication Spiral Map* (MEMT), publicado em 1912 e na publicação digital "Nikola Tesla, conheça seu mapa de Multiplicação", juntamente com a otimização das *Sequências de Raiz Digital* ($6k\pm1$), mostra uma ordem relativa dentro do estudo dos números primos, conseguindo definir a *Faixa Real dos Números Primos (FRNP)* dentro do universo dos inteiros naturais. Desta forma, pode-se considerar um padrão sequencial para determinar os fatores que compõem um número composto, podendo representar e estabelecer a *Sequência Raiz Digital Tesla Zollner* $(STZR_d)$ a saber $(741 - 528 - 396)$.

Palavras chave: Raiz digital numérica, sequência, transposição, números primos.

Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
Revista Científica
Facultad de Ciencias Básicas
Portoviejo - Manabí - Ecuador

1. Introducción

Los números primos han sido estudiados desde la antigüedad hasta nuestros días. Numerosos investigadores han manifestado que estos se producen al azar puesto que no obedecen a una lógica o secuencia, lo cual encierra un misterio (Euclides, 1991). En la actualidad, los matemáticos han desarrollado sofisticados y complicados algoritmos para esclarecerse el origen y el comportamiento en la aparición de los números primos, sin embargo esto no se ha logrado en su totalidad.

Los diversos problemas, hallazgos, descubrimientos planteados, junto a conjeturas generadas a partir del análisis exhaustivo de los números primos que se originan propiamente con el estudio de los números enteros, hasta la actualidad, han llevado al hombre durante cada época social a ir profundizando en el comportamiento de estos números, como base fundamental o pilares de la matemática, aportando grandes avances científicos directa o indirectamente dentro del campo de la Teoría de Números, en los números naturales y sus aplicaciones en la sociedad moderna.

El Mapa de Multiplicación o Espiral Matemática de Tesla (MEMT) (Machaca, 2019), muestra y evidencia la amplia visión del inventor en relación a las matemáticas y cómo encontró una manera de simplificarlas de un modo alternativo y maravilloso. Este modelo permite ver los números como: patrones, secuencias, números primos, así como algunos otros sistemas. Con esto Tesla se refería a la auto organización de los números y sus raíces digitales.

La raíz digital no es un concepto nuevo, como se puede ver en (Flores et al., 2022), además ha sido estudiado durante siglos. Al antiguo matemático griego Pitágoras se le atribuye el descubrimiento de la raíz digital, y fue un tema de interés entre los numerólogos medievales (Tutoring, 2023). El concepto de raíz digital se ha utilizado en varias culturas a lo largo de la historia, incluida la numerología china y las matemáticas védicas indias (Sánchez, 2024). Sin embargo, no se han encontrado referencias que muestren una fórmula precisa para la raíz digital de un número sustentada con una demostración matemática estricta y formal, solo fórmulas propuestas y sugeridas a través de algoritmos de programación o de estimaciones probabilísticas (Camacho, 2020; Hernández, 2009).

La raíz digital tiene aplicaciones prácticas en diversos campos, incluida la simplificación de cálculo numéricos, en áreas como la teoría de números, álgebra y geometría, mostrando propiedades y patrones interesantes asociados con números primos. Además se puede usar en la validación de tarjetas de crédito, la numerología, la teoría musical, el análisis del mercado de valores y el análisis deportivo. Es una herramienta que puede ayudar a comprender mejor el mundo que nos rodea y sigue siendo un área de investigación activa entre matemáticos y científicos.

En geometría, por ejemplo, se puede utilizar para clasificar triángulos según la longitud de sus lados. Un triángulo con lados a, b y c tiene: una raíz digital de 1 si todos los lados son congruentes mod 9; una raíz digital de 2 si dos lados son congruentes mod 9 y el tercero no lo es; y una raíz digital de $2\sqrt{3}$ si no hay dos lados congruentes mod 9. Este esquema de clasificación también se puede extender a otros polígonos.

En *teoría musical*, la raíz digital se puede usar en el estudio de los intervalos musicales, ya que éstos se miden en semitonos y la raíz digital del número de semitonos entre dos notas determina la clase del intervalo. En el *área bancaria*, la raíz digital se utiliza en la comprobación de la validez de los números de tarjetas de crédito, que suelen tener 16 dígitos siendo el último dígito un número de control. Este último se calcula mediante una fórmula que involucra los otros dígitos del número de tarjeta de crédito.

En el *análisis de las tendencias del mercado de valores*, la raíz digital se puede utilizar para manejar los precios de las acciones a lo largo del tiempo. Esto puede proporcionar información sobre patrones y tendencias en el mercado de valores que pueden no ser visibles mediante otros métodos de análisis. Como último ejemplo está la aplicación de la raíz digital en el área *numerología* pues permite calcular el número del camino de la vida, el cual es un número de un solo dígito que representa la suma de los dígitos de la fecha de nacimiento de una persona. Además de sus aplicaciones prácticas, la raíz digital también es un tema de interés entre los matemáticos recreativos ya que éstos usan dicha noción como ejemplo didáctico de aritmética modular (Bilbao, 2021). Hay muchas propiedades y patrones interesantes asociados con las raíces digitales.

El presente trabajo establece un fórmula matemática precisa para la definición de la raíz digital de un número lo que se denotará por $R_d(\cdot)$, mostrando la validez de la misma a través de una demostración matemática formal y se demuestran algunas propiedades de la raíz digital. También se pretende aportar una ayuda para establecer un orden dentro del caos de los números primos y su implicación directa a las distintas disciplinas aplicadas, y por ende en los avances tecnológicos que conllevan a brindar soporte técnico al servicio de la humanidad, desde una perspectiva un tanto innovadora e interesante a juicio de los autores.

En esta investigación se utiliza el *Análisis de modelo de Razonamiento Geométrico* (Vargas & Gamboa, 2013), formulando enunciados de propiedades sobre el *Mapa Espiral de Multiplicación de Tesla (MEMT)*, que luego se demuestran matemáticamente de manera formal, considerando que este diseño representa un sistema auto-organizado que permite comprender un orden sobre los números naturales enteros. Se puede evidenciar donde se posicionan los famosos números primos y compuestos impares, a través de *Secuencias de Raíz Digital de un Número (SR_d)*, introduciendo las nociones de *Secuencias Tesla Zollner de Raíz Digital Impar o Par* denotadas por $STZR_{d^-}(n)$ y $STZR_{d^+}(n)$, respectivamente, en busca de dar una luz más al anhelado estudio y comprensión del orden de los números primos. Permitiendo con esta representación secuencial, la lectura de forma visual del conjunto de datos que conforma el estudio de los números primos y compuestos; haciendo más fácil y rápida la comprensión e interpretación numérica de los átomos de los números naturales (los números primos).

2. Preliminares

2.1. Raíz digital de un número (RDN)

La *raíz digital de un número (R_d)* representa la expresión numérica que contiene *un solo dígito único* el cual se obtiene de la siguiente forma: Dado un número natural n, si se suman sus dígitos se obtiene un nuevo número que puede contener un solo dígito o más de un dígito. De obtener un número de un solo dígito a éste se denomina *raíz digital numérica de* n ($R_d(n)$). De lo contrario, se vuelve aplicar el mismo proceso de forma iterativa hasta llegar a un número de un solo dígito, el cual será *la raíz digital del numero* n. También se le conoce *suma digital repetida de un número natural* mediante un proceso iterativo de suma de dígitos. Las raíces digitales pueden aportar valiosas revisiones independientes para cálculos complicados (Tutoring, 2023).

Aunque mucho se ha dicho sobre la raíz digital de un número, poco se ha demostrado formalmente con rigor matemático. Solo se presentan propiedades de la raíz digital de forma empírica o vía una comprobación computacional pues la definición de la $R_d(n)$ es a través de un proceso iterativo el cual se puede programar a través de un algoritmo con bucles (Camacho, 2020). Por ejemplo en (Apostol, 1996) se expone que los únicos valores posibles de la *raíz digital* de los números primos p diferentes de 3, son: 1, 2, 4, 5, 7, 8. Se ha demostrado de forma probabilística, la frecuencia de cada uno de estos valores con un probabilidad de ocurrencia igual a $\frac{1}{6}$, presentando una distribución uniforme (Hernández, 2009).

2.2. Mapa Espiral de Multiplicación de Tesla

En una tienda de antigüedades de Phoenix, Arizona, U.S.A., fueron descubiertos unos viejos documentos pertenecientes alguna vez a Nikola Tesla. Estaban escondidos en un pequeño arcón, y fueron comprados por el artista local Abe Zucca. Sin embargo, eso no es lo único que contienen dichos documentos, también incluyen notas manuscritas inéditas que se refieren a las matemáticas, y que se cree podrían ser problemas aritméticos complejos nunca antes solucionados (Machaca, 2019).

Igualmente fue encontrado (de lo poco que se divulgó al público) un Mapa de la Multiplicación, o también conocido como *Espiral Matemática* creada por Tesla, que muestra y evidencia la amplia visión mental del inventor en relación a la Matemática y cómo encontró una manera de simplificarlas de un modo alternativo. El diagrama es muy intuitivo, permitiendo ver cómo trabajan todos los números basados en una espiral con 12 posiciones o ciclos, es un sistema altamente compuesto. Si se examina el dispositivo de Tesla se puede observar que la raíz digital de los números en las posiciones 3, 6, 9 y 12 se repite constantemente y parece estar dada por la secuencia 3, 6, 9. (Ver Figura 1).

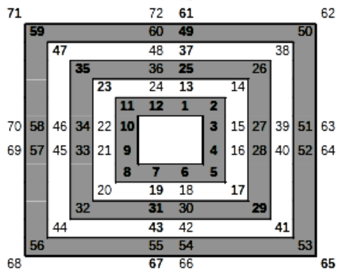

Figura 1. Espiral Mapa de Multiplicación de Tesla. Vista Rectangular Simple.

Tesla deja como una de sus frases más celebres el enunciado: *"Si supieras la magnificencia de los números tres, seis y nueve* $(3, 6, 9)$*, tendrías una llave al Universo"*.

ISNN 2588-0764 | Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024 | DOI:10.33936/ revbasdelaciencia.v9i2.6693

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

3. Resultados

Nótese que al tener un número n de dígitos $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$, es decir, $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, se puede establecer que:

$$a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \leq n \tag{1}$$

pues $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 10^0$ y $a_i \leq a_i 10^i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$.
Por otro lado, es claro que la $R_d(n)$ se calcula de forma iterativa en k iteraciones y en cada una se obtiene un número $d_{n,i}$ para $i = 0, 1, \ldots, k$ con $d_{n,0} = n$ y $d_{n,k}$ un número de un solo dígito, lo cual genera una sucesión de números $(d_{n,i})_{i=0}^{k}$ que se llamará la *sucesión de cálculo de la raíz digital del número* n. Por la ecuación (1) se tiene que la sucesión $(d_{n,i})_{i=0}^{k}$ es decreciente, y como

$$D = \{d_{n,0}, d_{n,1}, \ldots, d_{n,k-1}, d_{n,k}\} \subset \mathbb{N}$$

entonces el conjunto D tiene un primer elemento, por el principio de buena ordenación, que es $d_{n,k} = R_d(n)$.
Por otra parte, si los dígitos de n son $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$, es decir, $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} n &= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\ n &= a_k (9+1)^k + a_{k-1} (9+1)^{k-1} + \cdots + a_1 (9+1) + a_0 \\ n &= 9(a_k 9^{k-1} + a_{k-1} 9^{k-2} + \cdots + a_1) + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \end{aligned} \tag{2}$$

Así, es fácil deducir que $9|n$ si y solo si $9|(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0)$. Luego, por la ecuación (1) y el hecho de que en cada iteración se obtiene un número divisible por 9, se tiene que la raíz digital de un número que sea múltiplo de nueve es exactamente 9 teniendo como resultado el siguiente lema:

Lema 3.1. *Si $n = 9k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $R_d(n) = 9$.*

Ahora, a través del Teorema de División Entera, se sabe que dado un $n \in \mathbb{Z}$, éste se puede escribir de la siguiente forma:

$$n = 9k + i \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq 8$$

Luego, usando la ecuación (2) se obtiene que:

$$a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 9k - 9(a_k 9^{k-1} + a_{k-1} 9^{k-2} + \cdots + a_1) + i$$

mostrando que la suma de los dígitos de n también tiene residuo i al ser dividida entre 9. De manera que en la sucesión $(d_{n,i})_{i=0}^{k}$ todos los elementos $d_{n,i}$ tienen residuo i al ser dividido entre 9 y por tanto $R_d(n) = d_{n,k} = i$. Otra forma de ver el resultado final es observar que $d_{n,k-1} = 9 + i$ y luego evaluar los posibles casos para $i = 0, 1, \ldots, 8$ teniendo que:

Tabla 1. Estudio para $9 + i$

$d_{n,k-1} = 9 + i$		
Caso	Cálculo	$R_d(n)$
$i = 0$	$9 + 0 = 9$	9
$i = 1$	$9 + 1 = 10$	1
$i = 2$	$9 + 2 = 11$	2
$i = 4$	$9 + 4 = 13$	4
$i = 5$	$9 + 5 = 14$	5
$i = 6$	$9 + 6 = 15$	6
$i = 7$	$9 + 7 = 16$	7
$i = 8$	$9 + 8 = 17$	8

Este razonamiento permite enunciar el siguiente teorema que muestra la definición de la raíz digital de un número a través de una fórmula concreta que se obtiene de un proceso de dos pasos:

Teorema 3.1. *Dado un número $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 9k + r$, con $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq r \leq 8$, entonces*

$$R_d(n) = \begin{cases} 9 & si \quad r = 0 \\ r & si \quad 1 \leq r \leq 8 \end{cases}$$

De manera natural se define $R_d(0) = 0$. Luego, teniendo un número negativo $-n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces se define la *raíz digital de un número negativo* por $R_d(-n) = -R_d(n)$ ya que se puede trabajar con el número positivo n para calcular la raíz digital de n y luego asignarle el signo negativo.

Un resultado importante que será de utilidad en la demostración de la noción de *secuencias de raíz digital* será el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *Dado un número $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$R_d(n + 9) = R_d(n)$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la división entera existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 9k + r$ y $0 \leq r \leq 8$. Luego por el Teorema 3.1 se tiene que $R_d(n) = r$. Ahora, nótese que $n + 9 = 9(k + 1) + r$ y como $0 \leq r \leq 8$, se aplica de nuevo el Teorema 3.1 para concluir que $R_d(n + 9) = r = R_d(n)$. □

Ahora se mostrará un resultado relativo a la raíz digital de un número primo, el cual sale como una aplicación de Teorema 3.1. A saber:

Teorema 3.2 (Raíz Digital Prima). *Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo con $p \geq 5$, entonces los posibles valores de $R_d(p)$ son: 1, 2, 4, 5, 7, y 8.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la división entera se tiene que existen $k, r \in \mathbb{N}$ tales que $p = 9k+r$ con $0 \leq r \leq 8$. Luego, aplicando el Teorema 3.1, se tiene que $R_d(p) = r$. Como

$$9|9k, \qquad 3|9k + 3, \qquad 3|9k + 6,$$

se tiene que p no puede ser de las formas: $9k$, $9k + 3$, y $9k + 6$. Así, p solo puede ser de la forma $9k + r$ para los valores de $r = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8$. □

Sean ahora dos números $n, m \in \mathbb{N}$ y supóngase que $R_d(n) = r_n$ y $R_d(m) = r_m$, entonces $n = 9k_n + r_n$ y $m = 9k_m + r_m$. Así,

$$n + m = 9(k_n + k_m) + (r_n + r_m)$$

Si $r_n + r_m \leq 9$ entonces $R_d(n+m) = R_d(n)+R_d(m)$. Luego si $r_n + r_m > 9$, entonces $R_d(n+m) = R_d(R_d(n)+R_d(m))$. De manera similar se tiene que

$$n.m = (9k_n + r_n)(9k_m + r_m) = 9[(9k_n k_m) + k_n r_m + r_n k_m] + r_n r_m$$

De donde si $r_n r_m \leq 9$ entonces $R_d(nm) = R_d(n)R_d(m)$. Por otra parte, si $r_n r_m > 9$ entonces $R_d(nm) = R_d(R_d(n)R_d(m))$. Esto lleva a enunciar el siguiente lema.

Lema 3.2. *Sean dos números $n, m \in \mathbb{N}$. Si $R_d(n) = r_n$ y $R_d(m) = r_m$, entonces se cumple que*

i. $R_d(-n) = -R_d(n)$.

ii. $R_d(n + m) = R_d(R_d(n) + R_d(m))$.

iii. $R_d(nm) = R_d(R_d(n)R_d(m))$.

ISSN 2588-0764 | Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024 | DOI:10.33936/ revbasdelaciencia.v9i2.6693

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Ahora nótese que haciendo $k = 2h$, con $h \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$12h + i = 6k + i \qquad \text{para} \qquad i = 0, 1, \ldots, 12$$

Luego, haciendo un análisis para los valores de $i \geq 6$, se tiene un cuadro que muestra el número $12h + i$ y la secuencia de la forma $6q + r$ a la que pertenece el número, donde $0 \leq r \leq 5$

Tabla 2. Análisis de los casos posibles para $i \geq 6$.

Caso	$12h + i$	$6k + i$	q	r	$6q + r$
$i = 6$	$12h + 6$	$6(k + 1)$	$2h + 1$	$r = 0$	$6q$
$i = 7$	$12h + 7$	$6(k + 1) + 1$	$2h + 1$	$r = 1$	$6q + 1$
$i = 8$	$12h + 8$	$6(k + 1) + 2$	$2h + 1$	$r = 2$	$6q + 2$
$i = 9$	$12h + 9$	$6(k + 1) + 3$	$2h + 1$	$r = 3$	$6q + 3$
$i = 10$	$12h + 10$	$6(k + 1) + 4$	$2h + 1$	$r = 4$	$6q + 4$
$i = 11$	$12h + 11$	$6(k + 1) + 5$	$2h + 1$	$r = 5$	$6q + 5$

Esto permite reescribir el concepto de la Espiral Matemática de Tesla de forma optimizada como se puede ver en la Figura 2. La espiral que se presenta describe una curva plana que se origina por el desplazamiento de un punto, en el que concurren dos movimientos diferentes: lineal y otro angular; en ciclos de seis giros posicionales.

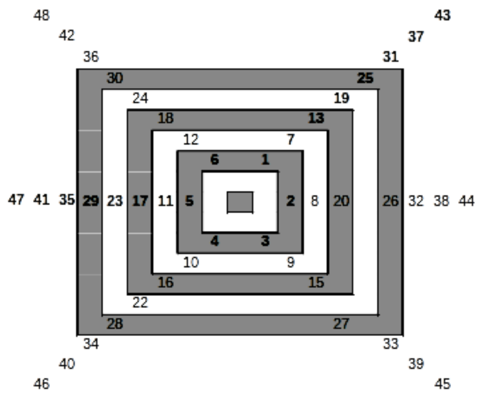

Figura 2. Espiral optimizada del Modelo Tesla Zollner para el estudio de números primos

Al expresar $n = 6k + r$ con $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq r \leq 5$, se puede ver que existen seis sucesiones de números en la espiral optimizada de Tesla-Zollner. A saber:

$$(6k)_{h=1}^{\infty} = \{6, 12, 18, \ldots, 6h, \ldots\} \qquad (6k+1)_{h=0}^{\infty} = \{1, 7, 13, \ldots, 6h+1, \ldots\}$$

$$(6k+2)_{h=0}^{\infty} = \{2, 8, 14, \ldots, 6h+2, \ldots\} \qquad (6k+3)_{h=0}^{\infty} = \{3, 9, 15, \ldots, 6h+3, \ldots\}$$

$$(6k+4)_{h=0}^{\infty} = \{4, 10, 16, \ldots, 6h+4, \ldots\} \qquad (6k+5)_{h=0}^{\infty} = \{5, 11, 17, \ldots, 6h+5, \ldots\}$$

Luego, escribiendo $k = 3w + p$ con $0 \leq p \leq 2$ y $w \in \mathbb{N}$ se tendría que

$$6k + r = 6(3w + p) + r = 9(2w) + (6p + r)$$

Por el Lema 3.2, se obtiene que

$$R_d(6k + r) = R_d(R_d(9(2w)) + R_d(6p + r))$$

y aplicando el Lema 3.2 se tiene que $R_d(n) = R_d(9+R_d(6p+r))$. Ahora, por el Corolario 3.1 se tiene que $R_d(n) = R_d(6p+r)$. Analizando los posibles casos que se puede presentar variando los valores de r y p se tiene:

Caso $r = 0$:

$$R_d(6p) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad p = 0 \\ 3 & \text{si} \quad p = 1 \\ 9 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Por tanto en la sucesión $(6k)_{h=1}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $6-3-9$.

Caso $r = 1$:

$$R_d(6p+1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = 0 \\ 7 & \text{si} \quad p = 1 \\ 4 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Por tanto, en la sucesión $(6k+1)_{h=0}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $1-7-4$.

Caso $r = 2$:

$$R_d(6p+2) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad p = 0 \\ 8 & \text{si} \quad p = 1 \\ 5 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Por tanto en la sucesión $(6k+2)_{h=0}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $2-8-5$.

Caso $r = 3$:

$$R_d(6p+3) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad p = 0 \\ 9 & \text{si} \quad p = 1 \\ 6 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Así en la sucesión $(6k+3)_{h=1}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $3-9-6$.

Caso $r = 4$:

$$R_d(6p+4) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad p = 0 \\ 1 & \text{si} \quad p = 1 \\ 7 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Por tanto en la sucesión $(6k+4)_{h=0}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $4-1-7$.

Caso $r = 5$:

$$R_d(6p+5) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad p = 0 \\ 2 & \text{si} \quad p = 1 \\ 8 & \text{si} \quad p = 2 \end{cases}$$

Así en la sucesión $(6k+5)_{h=1}^{\infty}$ siempre se repetirá la secuencia de raíz digital $5-2-8$.

ISNN 2588-0764 | Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024 | DOI:10.33936/ revbasdelaciencia.v9i2.6693

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Por último, nótese que la secuencia $(6k+4)_{h=0}^{\infty}$ se puede reescribir de la forma $(6k-2)_{h=1}^{\infty}$ y la sucesión $(6k+5)_{h=1}^{\infty}$ se puede reescribir de la forma $(6k-1)_{h=1}^{\infty}$. Teniendo así que existen las secuencias de raíz digital $(6-3-9)$, $(1-7-4)$, $(2-5-8)$, $(3-9-6)$, $(4-1-7)$, y $(5-2-8)$, como se muestra en la Figura 3.

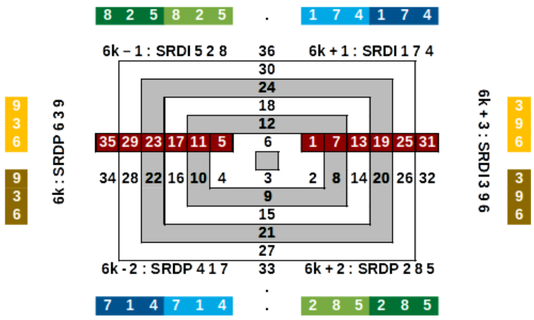

Figura 3. Espiral optimizada del Modelo Tesla Zollner para el estudio de números primos

Dado que para $k \in \mathbb{N}$

$$2|6k, \qquad 2|6k+2, \qquad 3|6k+3 \qquad 2|6k+4,$$

se tiene que los números primos se encuentran en las sucesiones $(6k+1)_{h=0}^{\infty}$ y $(6k+5)_{h=1}^{\infty}$ de manera que existen dos secuencias de raíz digital dentro de las cuales se puede encontrar los números primos, a saber $(1-7-4)$ y $(5-2-8)$. De igual forma existen cuatro secuencias de raíz digital dentro de las cuales se puede encontrar puros números compuestos, a saber $(6-3-9)$, $(2-8-5)$, $(3-9-6)$, y $(4-1-7)$.

Este *transposicionamiento* permite precisar lo que se llamará la *Franja Real de los Números Primos (FRNP)* la cual está representada en color rojo en la Figura 3. Tomando en cuenta el orden de aparición de las secuencias en la Figura 3 tomadas en sentido horario, etiquetando su aparición, y observando la primera raíz digital de cada secuencia presente en la representación, las secuencias $(174-285-369)$, quedan transposicionada como $(417-528-936)$, a las cuales se llamarán: *Secuencias Tesla Zollner de Raíz Digital Impar o Par* denotadas por $STZR_{d^-}(n)$ y $STZR_{d^+}(n)$, respectivamente. Así, para $k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$STZR_{d^-}(1) = 1-7-4 \sim (6k+1) \qquad STZR_{d^+}(1) = 4-1-7 \sim (6k-2)$$

$$STZR_{d^-}(2) = 5-2-8 \sim (6k-1) \qquad STZR_{d^+}(2) = 2-8-5 \sim (6k+2)$$

$$STZR_{d^-}(3) = 3-9-6 \sim (6k+3) \qquad STZR_{d^+}(3) = 6-9-3 \sim (6k).$$

Para finalizar algunas propiedades elementales, puntuales, de la raíz digital que se pueden probar son las siguientes:

Corolario 3.2. *Dado un número $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$R_d(n) = R_d(n-1) + 1$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la división entera existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 9k + r$ y $0 \leq r \leq 8$. Luego por el Teorema 3.1 se tiene que $R_d(n) = r$.
Dado que

$$R_d(n) = (r-1) + 1 \tag{3}$$

Bastaría probar que $R_d(n-1) = r-1$. Como $n = 9k + r$, entonces $n - 1 = 9k + (r-1)$ y, como $r - 1 < r$, se tiene que:

$$R_d(n-1) = r - 1 \tag{4}$$

Así, por las ecuaciones (3) y (4), se tiene que $R_d(n) = R_d(n-1) + 1$ $\square$

Corolario 3.3. *Dado un número $n, k \in \mathbb{N}$, con $K \geq 2$ se tiene que:*

$$R_d\left(n^k\right) = R_d\left([R_d(n)]^k\right).$$

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024 | DOI:10.33936/revbasdelaciencia.v9i2.6693

Demostración. Aplíquese inducción sobre k. Si $k = 2$ el corolario es válido por el ítem *iii.* del Lema 3.2. Luego, supóngase cierto para $k = h$, es decir, $R_d\left(n^h\right) = R_d\left([R_d(n)]^h\right)$. Así, para ver el caso $k = h+1$ se tiene, por hipótesis inductiva, que

$$R_d\left(n^{h+1}\right) = R_d\left(n^h n\right) = R_d\left(R_d(n^h)R_d(n)\right) = R_d\left([R_d(n)]^h R_d(n)\right) = R_d\left([R_d(n)]^{h+1}\right).$$

□

Lema 3.3. *Dado un número $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $R_d(n^2)$ puede tomar solo los valores de 1, 4, 7, 9.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la división entera existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 9k + r$ y $0 \leq r \leq 8$. Luego, por el Teorema 3.1, se tiene que $R_d(n) = r$.
Aplicando el Corolario 3.3, se tiene que

$$R_d(n^2) = R_d(R_d(n)R_d(n)) = R_d(r^2).$$

Para el caso donde $r = 0$ se tiene que $9|n$ y por el Lema 3.1 se tiene que $R_d(n^2) = 9$. Ahora, cuando $1 \leq r \leq 8$, entonces para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

r	r^2	$R_d(r^2)$
1	1	1
2	4	4
3	9	9
4	16	7
5	25	7
6	36	9
7	49	4
8	64	1

$$\Longrightarrow \quad R_d(n^2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 9k \pm 1 \\ 4 & \text{si} \quad n = 9k \pm 2 \\ 7 & \text{si} \quad n = 9k \pm 4 \\ 9 & \text{si} \quad n = 9k \pm 3 \end{cases}$$

□

Lema 3.4. *Dado un número $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $R_d(n^3)$ puede tomar solo los valores de 1, 8, 9.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la división entera existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 9k + r$ y $0 \leq r \leq 8$. Luego, por el Teorema 3.1, se tiene que $R_d(n) = r$.
Aplicando el Corolario 3.3, se tiene que

$$R_d\left(n^3\right) = R_d\left([R_d(n)]^3\right) = R_d(r^3).$$

Para el caso donde $r = 0$ se tiene que $9|n$ y por el Lema 3.1 se tiene que $R_d(n^2) = 9$. Ahora, cuando $1 \leq r \leq 8$, entonces para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

r	r^3	$R_d(r^3)$
1	1	1
2	8	8
3	27	9
4	64	1
5	125	8
6	216	9
7	343	1
8	512	8

$$\Longrightarrow \quad R_d(n^3) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 9k+1, \;\; n = 9k+4, \;\; \text{ó} \;\; n = 9k+7 \\ 8 & \text{si} \quad n = 9k+2, \;\; n = 9k+5, \;\; \text{ó} \;\; n = 9k+8 \\ 9 & \text{si} \quad n = 9k+3, \;\; n = 9k+6, \;\; \text{ó} \;\; 9|n \end{cases}$$

□

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

4. Discusión de los resultados

Nótese que al tener una demostración matemática rigurosa de la noción de raíz digital, y las propiedades mostradas en este trabajo, permite identificar o establecer nuevas e interesantes propiedades de los números enteros. Por ejemplo, brinda la posibilidad de resolver ecuaciones numéricas, de una manera más rápida y eficaz, o almenos permite avanzar significativamente en la solución de las mismas. *Supóngase que se desea determinar si existe una terna (x, y, z), con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tal que satisface la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 114$.*

Es sabido que las soluciones de esta ecuación, de existir, no son sencillas de calcular (ver BBC, 2019; Wikipedia contributors, 2024). Sin embargo, al aplicar la noción de raíz digital y las propiedades mostradas en este trabajo, se pueden descartar rápidamente casos de la ecuación donde no existen solucioes. Nótese que de existir una solución (x, y, z) de la ecuación dada debe cumplir que $R_d(x^3 + y^3 + z^3) = R_d(114)$. Como $R_d(114) = 6$, entonces $R_d(x^3 + y^3 + z^3) = 6$. Por otro lado, se tiene que

$$R_d(x^3 + y^3 + z^3) = R_d\left(R_d(x^3) + R_d(y^3) + R_d(z^3)\right).$$

Además, $R_d(-x) = -R_d(x)$ y así $R_d\left((-x)^3\right) = -R_d\left(x^3\right)$, en el supuesto de que $x < 0$. Suponiendo que $x = 0$ entonces $R_d\left(R_d(y^3) + R_d(z^3)\right) = 6$. Luego, como para $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que los valores posible de $R_d(x^3)$ son 1, 8, y 9 (ver Lema 3.4), se tendrían que no es posible hallar una combinación de los valores posibles que sea solución de la ecuación dada. Por tanto, no existen soluciones enteras de la forma $(0, y, z)$. De forma similar se razona para los casos $(x, 0, z)$ y $(x, y, 0)$. Aquí ya se han descartado una gran cantidad de posibilidades de casos a estudiar para determinar las soluciones de la ecuación.

5. Conclusiones

La raíz digital tiene aplicaciones prácticas en diversos campos de las ciencias y la tecnología, incluida la simplificación de cálculo numéricos, en áreas como la teoría de números, álgebra y geometría, y muestra propiedades y patrones interesantes asociados con números primos. Es una herramienta poderosa que puede ayudarnos a comprender mejor el mundo que nos rodea y sigue siendo un área de investigación activa entre matemáticos y científicos.

6. Referencias

Apostol, T. (1996). ¿What Is the Most Surprising Result in Mathematics? *Math Horizons*, *4*(2), 8-14. http://www.jstor.org/stable/25678086

BBC. (2019, septiembre). Enigma de la suma de 3 cubos: matemáticos encuentran la solución final después de 65 años. https://www.bbc.com/mundo/noticias-49675503

Bilbao, Á. (2021). *La matemática recreativa como recurso motivador en el aula de matemáticas* [Tesis de maestría, Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias]. https://uvadoc.uva.es/handle/10324/49719

Camacho, J. (2020). Fórmulas para calcular la Raíz Digital y la Suma Digital de un Número Entero Positivo. https://www.masscience.com/formulas-para-calcular-la-raiz-digital-y-la-suma-digital-de-un-numero-entero-positivo/

Euclides. (1991). *Elementos* (E. Gredos, Ed.; Vol. I,II,III). Editorial Gredos.

Flores, S., Acuña, E., & Marrero, P. (2022). Existential refinement on the search of integer solutions for the diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 = n$. https://arxiv.org/abs/2103.17037

Hernández, P. (2009). Sobre la raíz digital de los números primos. *Revista Digital Matemática*, *10*(1), 1-5. https://funes.uniandes.edu.co/formato-de-archivo/pdf/

Machaca, R. (2019, julio). Nikola Tesla; conoce su mapa de multiplicación. https://www.azulweb.net/nikola-tesla-conoce-su-mapa-de-multiplicacion/

Sánchez, J. A. (2024, octubre). Las Matemáticas en la India (500 - 1200 D.C.) https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/

Tutoring, C. Z. (2023, abril). *Digital Root: Definitions and Examples - Club Z! Tutoring.* https://clubztutoring.com/ed-resources/math/digital-root-definitions-examples-6-7-4/

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024
DOI:10.33936/revbasdelaciencia.v9i2.6693

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1). https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944/4738

Wikipedia contributors. (2024, septiembre). Sums of three cubes.

7. Contribución de autores

Autor	Contribución
Zollner Castellanos	Metodología, redacción, búsqueda bibliográfica
Tobías Rosas Soto	Concepción, redacción, diseño y revisión del artículo

ISNN 2588-0764 | Vol. 9, Núm. 2 (14-24): Mayo-Agosto, 2024 | DOI:10.33936/ revbasdelaciencia.v9i2.6693