



Publicación Cuatrimestral. Vol. 8, No. 3, septiembre/diciembre, 2023, Ecuador (p. 63 -75). Edición continua
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index>
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i3.6955>.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS UTILIZANDO EL MÉTODO DE MOLIFICACIÓN

Paulina Monserrate Alonzo Dumes¹ , Raúl Manzanilla Morillo² , Richard A. Rosales Rangel³ 

¹Universidad Técnica de Manabí, Instituto de Posgrado, Portoviejo, Ecuador. Email: palonzo6444@utm.edu.ec

²Universidad Yachay Tech, Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Urcuquí, Ecuador. Email: rmanzanilla@yachaytech.edu.ec

³Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Departamento de Cálculo, Mérida, Venezuela. Email: rrra@ula.ve

*Autor para correspondencia: palonzo6444@utm.edu.ec

Recibido: 01-08-2023/ Aceptado: 02-12-2023/ Publicación: 15-12-2023

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas, Ph.D. 

RESUMEN

La función Gaussiana ha sido empleada en el método de la molificación para resolver problemas cuyas soluciones generan curvas que pueden presentar cambios bruscos en el dominio. El método se define usando la convolución de funciones como una forma de estabilizar los resultados numéricos. Se propone el uso de funciones polinomiales truncadas o funciones burbuja, como el núcleo de la molificación para resolver problemas de valores iniciales, descritos a través de ecuaciones diferenciales. Según los resultados obtenidos, este método es capaz de reducir las oscilaciones que aparecen al resolver problemas de convección-difusión con diferencias finitas, permitiendo el uso de núcleos polinomiales para obtener resultados estables y precisos.

Palabras clave: Diferencias finitas, función burbuja, molificación gaussiana.

RESOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE MOLLIFICATION METHOD

ABSTRACT

The Gauss function has been used in the mollification method to solve problems with solution have fast changes on the domain. This method use the function's convolution like a tool for the estabilization of the results. It is propose polynomial functions or bubble functions like kernel of the molification to solve boundary values problems embed in the ordinary differential equations. According to the results obtained, this method is capable of reducing the oscillations that appear when solving convection-diffusion problems with finite differences, allowing the use of polynomial kernels to obtain stable and precise results.

Keywords: Finite differences, bubble function, gauss mollification.



RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PELO MÉTODO DE MOLLIFICAÇÃO

RESUMO

A função de Gauss tem sido usada no método de molificação para resolver problemas com solução de mudanças rápidas no domínio. Este método usa a convolução da função como uma ferramenta para a estabilização dos resultados. Funções polinomiais ou funções de bolha são propostas como o núcleo da molificação para resolver problemas de valores de contorno embutidos nas equações diferenciais ordinárias. De acordo com os resultados obtidos, este método é capaz de reduzir as oscilações que aparecem na resolução de problemas de convecção-difusão com diferenças finitas, permitindo a utilização de núcleos polinomiais para obter resultados estáveis e precisos.

Palavras chave: Diferenças finitas, funções de bolha, Molificação Gaussiana.

Citación sugerida: Paulina Alonzo, Raúl Manzanilla, Richard Rosales. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Utilizando el Método de Molificación. Revista Bases de la Ciencia, Vol. 8, No. 3, septiembre/diciembre, 2023, Ecuador (p. 63 -75). DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v8i3.6955>





1. INTRODUCCIÓN

Cuando se quieren resolver problemas de valores iniciales y de contorno, que involucran ecuaciones de difusión, de convección-difusión y ecuaciones hiperbólicas utilizando métodos explícitos de diferencias finitas o volúmenes finitos, es necesario imponer condiciones que sean admisibles, es decir, que no contravengan ningún principio físico o de la aplicación que se está trabajando. Sin embargo, en algunas ocasiones es posible que se planteen problemas que no se ajusten a esta norma (Murio, 1993). Es entonces, cuando surgen problemas mal planteados, los cuales son sometidos a métodos computacionales que generalmente presentan comportamientos erráticos. Una manera de regularizar estos problemas es utilizar el método de la molificación. Se ha demostrado que este método ayuda a estabilizar los esquemas explícitos de avance temporal, centrados en el espacio (Mejía, 2007), (Acosta and Mejía, 2008). Es decir, ofrecen una forma de aumentar la estabilidad ligada al método explícito. El método de molificación está basado en la convolución de dos funciones (Royo, 2011), una de las cuales está provista de suficiente suavidad como para filtrar las oscilaciones que surgen al avanzar en el tiempo (Smith, 1997) (Smith S. W., 2003). En la bibliografía se ha utilizado con frecuencia el núcleo de Gauss como molificador Guo (1982), Mejía and Murio (1996), Nedeljkov and Oberguggenberger (2012), Rosales and Díez (2016), Marechal et al. (2023). En nuestro trabajo se ha ensayado el uso de funciones distintas al núcleo gaussiano como molificadores, conservando las propiedades de estabilización del método.

Primero se resuelven problemas de valor inicial, con ecuaciones diferenciales de segundo orden, usando diferencias finitas, para luego molificar la solución en cada paso de tiempo. En la molificación se usa tanto el núcleo gaussianos como núcleos polinomiales, observando convergencia en ambos casos, y también se logra la reducción de las oscilaciones generadas por las diferencias finitas. Finalmente, se comparan las tres soluciones obtenidas con diferencias finitas, con molificación gaussiana y con molificación polinomial, y se estiman los errores respectivos. Según los resultados numéricos, se observa que con una elección adecuada de parámetros, la molificación polinomial mejora las aproximaciones encontradas con diferencias finitas, y con este núcleo, también se obtiene estabilidad.

2. MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

La resolución del problema se hará numéricamente utilizando el método de diferencias finitas (Gerald and Wheatley, 2000). Los dominios espacial y temporal se tratan de manera distinta, aplicando una aproximación hacia adelante en el tiempo y centrada en el espacio. En este sentido las diferencias progresivas y centradas se describen a continuación. Dada una función f , definida sobre el intervalo $[a, b]$, y un punto $x_0 \in [a, b]$, se quiere calcular la derivada $f'(x_1)$, con $x_1 = x_0 + h$, y $h \neq 0$ lo suficientemente pequeño como para asegurar que $x_1 \in [a, b]$. Recordando la definición de la derivada,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si h es suficientemente pequeño, se puede calcular aproximadamente el valor de la derivada a través de $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Si se quiere estimar el error cometido, se desarrolla la función f en serie de Taylor, alrededor del punto x_0 , hasta el orden $(n - 1)$ y se obtiene la expresión

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \text{ con } a \leq \xi \leq b.$$

Desarrollando hasta $n = 1$: $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$. Luego, despejando $f'(x_0)$ se obtiene $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$. Considerando h un número muy pequeño, el término de error $-\frac{h}{2} \cdot f''(\xi)$ se puede despreciar, y la derivada la calculamos de manera aproximada con la fórmula

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta fórmula se conoce como "formula de las diferencias finitas hacia adelante" o "formula de las diferencias finitas progresivas". El error cometido al usarla está dado por $E = \left| \frac{h^2}{2} f''(\xi) \right| \leq \frac{h^2}{2} \max |f''(x)|$. En el caso en que se quiera utilizar puntos centrados en x_0 para estimar la derivada de la función, se puede utilizar la aproximación

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Esta fórmula se conoce como "formula de las diferencias finitas centradas" y el error cometido es $E = \left| \frac{h^2}{6} f''(\xi) \right| \leq \frac{h^2}{6} \max |f''(x)|$. Se puede observar que el error cometido cuando se usan diferencias centradas es menor que el error de las diferencias no centradas, sin embargo, el error cometido utilizando estos métodos de diferenciación numérica aproximada es de orden dos. No obstante, al sustituir esta aproximación de las derivadas en la ecuación en el lugar de las correspondientes derivadas temporal y espacial de primer orden se puede obtener una formulación discreta de la ecuación diferencial. Consideremos la ecuación de convección difusión

$$u_t + au_x = bu_{xx}, \quad \text{en } [x_0, x_1] \times [0, T] \quad (1)$$

Definiendo la partición de $[x_0, x_1]$ de $M + 1$ puntos, $x_m = x_0 + mh$, $h = \frac{x_1 - x_0}{M}$, $0 \leq m \leq M$ y la partición de $[0, T]$ de $N + 1$ puntos, $t_n = nk$, $k = \frac{T}{N}$, $0 \leq n \leq N$ y tomando el esquema de diferencias finitas hacia adelante en el tiempo y centradas en el espacio para la ecuación 1, se obtiene la ecuación discreta o esquema de diferencias finitas

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = b \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

Aquí, v_m^n representa la aproximación discreta del valor de u en el nodo (x_m, t_n) , h y k son los pasos uniformes de las mallas espacial y temporal, respectivamente. La ecuación anterior es equivalente a

$$v_m^{n+1} = v_m^n + b\mu(1 + \alpha)v_{m-1}^n - 2b\mu v_m^n + b\mu(1 - \alpha)v_{m+1}^n$$

donde $\mu = \frac{k}{h^2}$, $\lambda = \frac{k}{h}$, $\alpha = \frac{ha}{2b} = \frac{a\lambda}{2b\mu}$.

3. MÉTODO DE MOLIFICACIÓN

El método de molificación consiste en hacer la convolución de una función dada con otra función llamada núcleo y emplear esta convolución en las ecuaciones generadas a partir del método de las diferencias finitas. El núcleo gaussiano ha sido empleado en numerosos trabajos para hacer la molificación, (Acosta and Mejía, 2008). Aquí se pretende sustituir este núcleo Gaussiano y analizar las bondades del nuevo núcleo, definido con funciones polinomiales del tipo burbuja. Para ello, debemos recordar las siguientes definiciones.



3.1 Núcleo Gaussiano truncado

Para definir el método de molificación hay que conocer el núcleo gaussiano que forma parte de él, (Acosta and Mejía, 2008). Dados $\delta > 0$, $yp > 0$ el núcleo gaussiano se define como:

$$\kappa_{\delta p}(t) = \begin{cases} A_p \delta^{-1} \exp\left(-\frac{t^2}{\delta^2}\right), & |t| \leq p\delta \\ 0, & |t| > p\delta \end{cases}$$

donde

$$A_p = \left(\int_{-p}^p \exp(-s^2) ds \right)^{-1}$$

El núcleo gaussiano truncado tiene la propiedad de ser no negativo, infinitamente diferenciable en $(-p, p)$, se anula fuera del intervalo $[-p, p]$ y su integral sobre toda la recta real es igual a 1. De forma análoga se puede definir el núcleo en forma de un polinomio de grado cuatro, a través de:

$$\kappa(t) = \begin{cases} C(t-1)^2(t+1)^2 & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

donde la constante C, se calcula de manera que la integral de κ sobre la recta real sea igual a 1. Este nuevo núcleo tiene la propiedad de ser no negativo, infinitas veces diferenciable en $(-1, 1)$, se anula fuera del intervalo $[-1, 1]$ y su integral sobre toda la recta es igual a 1. Es decir, cumple con las características del núcleo gaussiano. En el proceso de molificación, se utiliza la convolución de dos funciones, cuya definición se da a continuación.

3.2 Convolución

Dadas dos funciones f y g continuas por parte en el intervalo $[0, +\infty)$, la convolución de f y g se representa por $f * g$ y está dada por la integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

En el caso discreto, la convolución se puede escribir como (Ambardar, 2002):

$$f_n * g_n = \sum_{k=0}^n f_n g_{n-k}.$$

La convolución tiene ciertas propiedades, entre las que se encuentra la conmutativa, es decir,

$$f * g = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$

En la convolución se puede observar que está involucrada la reflexión con respecto al eje y de una de las funciones, junto con una traslación en t unidades. Luego, es necesario extender dicha función para que esté definida a la izquierda del origen. Esta extensión se puede hacer considerando dicha función como par o como impar. En el caso del núcleo gaussiano, si lo definimos con su centro en el origen, éste será simétrico con respecto al eje y y por lo tanto no será necesario hacer la extensión, ya que estará definido en un intervalo centrado en el origen y su reflexión, por efecto de su simetría generará la misma función. La convolución es usada con frecuencia en los problemas de procesamiento y filtrado de señales (Smith, 1997) (Smith, 2013), para amplificar o atenuar una señal, suavizar una señal, entre otras aplicaciones.

3.3 $\delta - p$ Molificación

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable, se define la δp -molificación, denotada por $J_{\delta p}f$, como la convolución de f con el núcleo $\kappa_{\delta p}$. Es decir,

$$J_{\delta p}f(t) = (\kappa_{\delta p} * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{\delta p}(t-s)f(s)ds$$

El núcleo Gaussiano $\kappa_{\delta p}(t)$ tiene soporte compacto en el intervalo $[-p,p]$, pues está definida por partes y es diferente de 0 para $|t| \leq p$, luego $\kappa_{\delta p}(t-s)$ es una reflexión con respecto al eje y junto a la traslación de t unidades a la derecha, por lo que el integrando tendrá soporte compacto en $[t-p, t+p]$, ya que está definida en $|t-s| \leq p$, de donde $-p \leq s-t \leq p$, de donde $t-p \leq s \leq t+p$. Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{\delta p}(t-s)f(s)ds = \int_{t-p}^{t+p} \kappa_{\delta p}(t-s)f(s)ds.$$

Haciendo el cambio de variables $s = w+t$, tenemos que $ds = dw$. Además, cuando $s = t-p$, $w = -p$, y cuando $s = t+p$, $w = p$. Entonces,

$$\int_{t-p}^{t+p} \kappa_{\delta p}(t-s)f(s)ds = \int_{-p}^p \kappa_{\delta p}(-w)f(w+t)dw.$$

Llamando de nuevo s a w podemos escribir

$$J_{\delta p}f(t) = \int_{-p}^p \kappa_{\delta p}(-s)f(s+t)ds$$

Si f está definida en un conjunto acotado Y , el cálculo de la convolución $J_{\delta p}f$ requiere que se extienda f a puntos en el exterior de Y , o la restricción de f a un conjunto propio de Y .

3.4 Molificación discreta

Para el cálculo de la convolución y su implementación numérica, es necesario discretizar la molificación. En este sentido, sea $X = \{x_j : x_j = x_0 + jh, j \in Z\}$ una discretización de un dominio, con x_0 y $h > 0$, números reales dados. Supongamos que $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida por $G(x_j) = y_j$, es decir, está definida en un conjunto discreto.

Haciendo $S_j = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$, $j \in Z$, cada S_j representa el punto medio de dos puntos consecutivos de la discretización. Los intervalos $I_j = [S_j, S_{j+1})$, $j \in Z$, serán los soportes de los molificadores en las coordenadas dadas. Considerando la función

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j \chi_j(t), t \in \mathbb{R}$$

donde χ_j es la función característica de I_j , se define, (Mejía, 2007) para $\delta > 0$ y η un entero no negativo, la $\delta\eta$ -molificación de G como la δp -molificación de f con

$$p = \left(\eta + \frac{1}{2}\right)h = (2\eta + 1)\frac{h}{2}.$$

Es decir, la función discreta G se molifica luego de hacerla continua a trozos con la función característica, y

$$J_{\delta\eta}G(x) = J_{\delta p}f(x)$$



4. MOLIFICACIÓN APLICADA A ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Consideremos la ecuación de convección difusión

$$u_t + au_x = bu_{xx} \text{ en } [x_0, x_1] \times [0, T].$$

Como ya fue planteado en la sección 2, el esquema de diferencias finitas obtenido para esta ecuación es

$$v_m^{n+1} = v_m^n + b\mu(1 + \alpha)v_{m-1}^n - 2b\mu v_m^n + b\mu(1 - \alpha)v_{m+1}^n$$

donde

$$\mu = \frac{k}{h^2}, \lambda = \frac{k}{h}, \quad \alpha = \frac{ha}{2b} = \frac{a\lambda}{2b\mu}.$$

Sea $z_m^n = J_{\delta\eta} v^n(x_m)$ la $\delta\eta$ -molificación en el espacio de v^n evaluada en el punto x_m .

Se pueden describir al menos dos maneras de hacer molificación (Murio (1993)). La primera resulta de reemplazar los datos de entrada que vienen de la diferenciación espacial discreta por sus versiones molificadas:

$$v_m^{n+1} = v_m^n + b\mu(1 + \alpha)z_{m-1}^n - 2b\mu z_m^n + b\mu(1 - \alpha)z_{m+1}^n.$$

El segundo esquema de molificación el cual es el que trabajamos acá, se obtiene reemplazando los términos del lado derecho de la discretización por diferencias finitas por sus versiones molificadas:

$$v_m^{n+1} = z_m^n + b\mu(1 + \alpha)z_{m-1}^n - 2b\mu z_m^n + b\mu(1 - \alpha)z_{m+1}^n.$$

Para analizar el método, se reescriben las fórmulas en términos de la molificación discreta, haciendo $w_j = 0$ para $|j| > \eta$, tal que

$$z_m^n = \sum_{j=-\eta}^{\eta} w_j v_{m+j}^n = \sum_{j=-\eta-1}^{\eta+1} w_j v_{m+j}^n$$

donde

$$w_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \kappa_{\delta p}(-s) ds$$

son los pesos de la molificación. Algunos de estos pesos se pueden observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Pesos de molificación para el núcleo gaussiano. Fuente: Tomado de (Acosta and Mejía, 2008)

η	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	0.84272	0.07864				
2	0.60387	0.19262	0.0054438			
3	0.45556	0.23772	0.033291	0.0012099		
4	0.36266	0.24003	0.069440	0.0087275	0.00047268	
5	0.30028	0.22625	0.096723	0.023430	0.0032095	0.00024798

La convergencia del método de molificación se puede resumir en el siguiente teorema.

5. CONVERGENCIA DEL MÉTODO

Teorema 1. *Teorema. Sea g una función real suficientemente suave. Sea G su versión discreta definida sobre X . Si G^ε es otra función discreta definida sobre X , tal que*

$$|G^\varepsilon(x_j) - G(x_j)| \leq \varepsilon, \quad \text{para } x_j \in X,$$

entonces, para cada conjunto compacto $K = [a, b]$ existe una constante $C = C(K)$ tal que, si $x_j \in K$,

$$\begin{aligned} |J_{\delta\eta}G^\varepsilon(x_j) - J_{\delta\eta}G(x_j)| &\leq \varepsilon \\ |J_{\delta\eta}G(x_j) - g(x_j)| &\leq Ch^2 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} |D_+J_{\delta\eta}G(x_j) - g'(x_j)| &\leq Ch, \\ |D_0J_{\delta\eta}G(x_j) - g'(x_j)| &\leq Ch^2, \\ |D_-D_+J_{\delta\eta}G(x_j) - g''(x_j)| &\leq Ch^2, \end{aligned}$$

donde D_+ , D_- y D_0 son los operadores en diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centrados, respectivamente.

La demostración de puede encontrar en (Acosta and Mejía (2008)).

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Problema de difusión dominante

Se resolvió la ecuación de convección difusión

$$u_t + au_x = bu_{xx}, \quad (2)$$

cuya solución es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{(x-a(1+t))^2}{4b(1+t)}}$$

con los parámetros

$$x_0 = -1, x_1 = 2, a = 1, b = \frac{ah}{2\alpha}, \alpha = \frac{1}{2}, h = \frac{x_0 - x_1}{n}, \Delta t = 0.1, \delta = 0.01, n = 20, \eta = 20,$$

sobre el intervalo espacial $[-1, 2]$ y el intervalo temporal $[0, 4]$, usando el programa (GNU Octave).

Con el método de molificación con núcleo gaussiano o una función polinomial de cuarto grado como funciones de molificación se alcanzan soluciones aproximadas que logran disminuir el error del método de diferencias finitas en un 50% aproximadamente. Las gráficas de las soluciones exacta y aproximada por diferencias finitas y con molificación con núcleo gaussiano se pueden observar en Fig. 1, donde en el eje x está representado el espacio en la Fig. 1 (a) y en la Fig. 1 (b) se muestra el error a lo largo del tiempo.

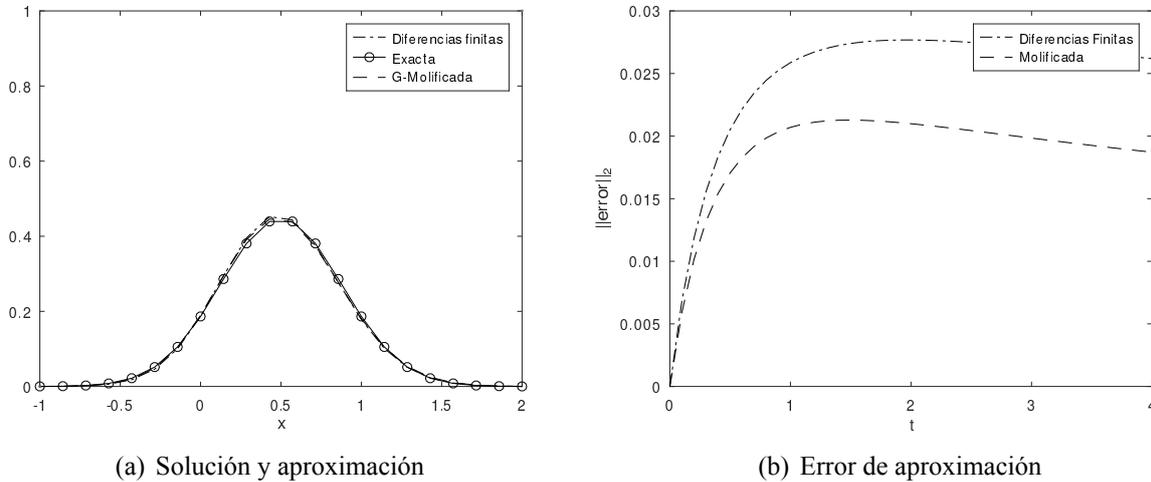


Figura 1. Problema Difusión dominante: molificación con núcleo gaussiano.

Las gráficas correspondientes a la solución exacta, por diferencias finitas y molificación polinomial se pueden observar en la Fig. 2 (a), mientras que en la Fig. 2 (b) se puede ver el error de la aproximación a lo largo del tiempo.

Tanto en la molificación con núcleo gaussiano como con núcleo polinomial se logran reducir los errores de forma significativa. En ambos casos se puede apreciar que con los parámetros escogidos, la aproximaciones tanto con molificación gaussiana como con la polinomial exhiben errores menores que los encontrados con el método de las diferencias finitas. En este problema, ya sea que se use núcleo gaussiano o núcleo polinomial, la aproximación encontrada es prácticamente la misma, aunque los errores estimados mediante el núcleo polinomial son ligeramente menores que los encontrados con el núcleo gaussiano, como se puede observar en la Fig. 3.

6.2 Problema de convección dominante

Se resolvió la ecuación de convección difusión (2), con los siguientes parámetros: $\alpha = 5, x_0 = 0, x_1 = 2, h = 0.2, T = 16, \delta = 0.45, n = 40, \eta = 20$. La solución es una onda que se desplaza de izquierda a derecha. Las aproximaciones numéricas utilizando diferencias finitas hacia adelante y con molificación se pueden ver en la Figura 4 (a) y en la Figura 5 (a), donde en el eje horizontal se representa el espacio y en el eje vertical la solución. En estas gráficas se puede observar que la solución aproximada por el método de las diferencias finitas produce oscilaciones que no son parte de la solución, mientras que con el uso de la molificación, estas oscilaciones son reducidas.

El error de aproximación se calcula usando la norma L_2 , a través de

$$\|\text{error}\|_2 = \int_{x_0}^{x_1} \|u - u_H\|^2 dx$$

donde u y u_H representan la solución exacta y la aproximada, respectivamente. La estimación de estos errores en la solución aproximada usando molificación con núcleo gaussiano se puede ver en la Fig. 4 (b), mientras que el error mediante el uso de la molificación con núcleo polinomial se puede ver en la Fig. 5 (b).

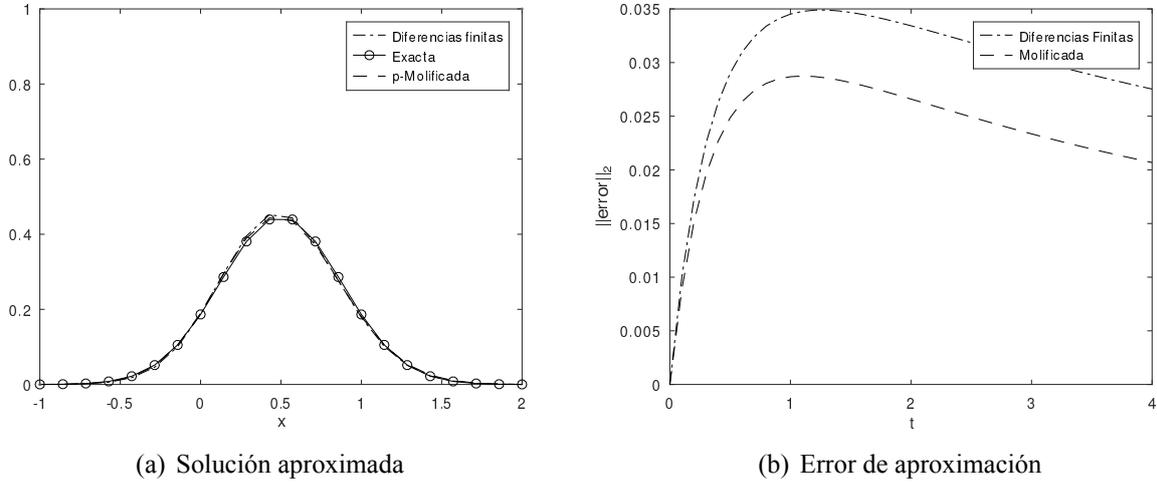


Figura 2. Problema Difusión dominante: molificación con núcleo polinomial.

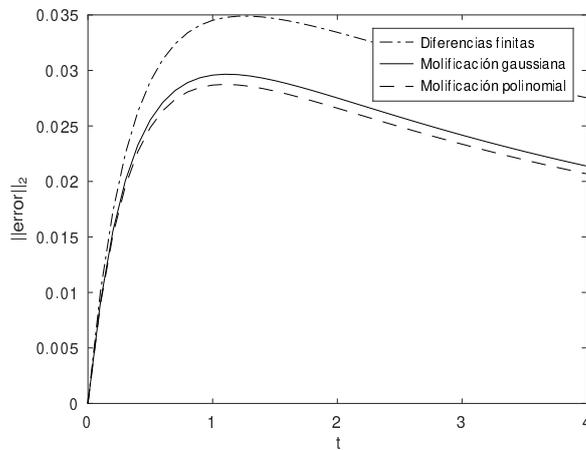
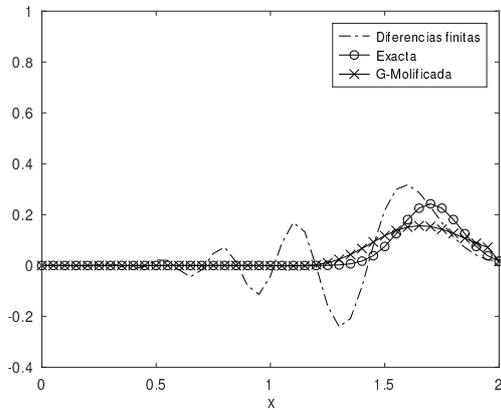
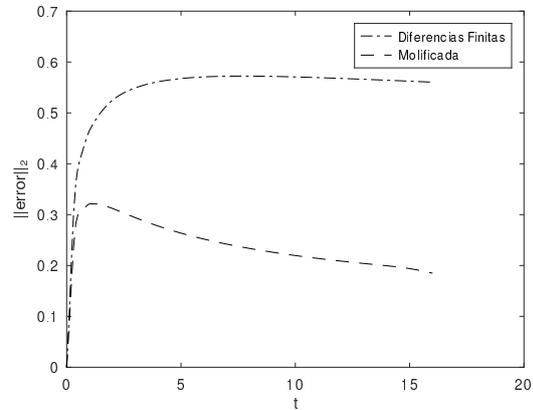


Figura 3. Problema Difusión dominante: Comparación de los errores con el uso de diferentes núcleos.

Con los parámetros escogidos, tanto la molificación gaussiana como la polinomial, estabilizan los resultados, eliminando las oscilaciones que aparecen en la parte de atrás de la onda. El método de diferencias finitas genera errores que van en aumento a medida que se avanza en el tiempo y produce oscilaciones en la parte izquierda de la onda de solución, mientras que el método de molificación logra reducir dichas oscilaciones, obteniéndose errores que tienden a disminuir. Escogiendo los parámetros de forma adecuada para el empleo de la molificación polinomial truncada de cuarto grado, se reducen las oscilaciones y los errores tienden ser menores que los obtenidos con la molificación gaussiana, como se puede observar en la Fig. 6. Al comparar los errores con ambos núcleos, el comportamiento es similar, aunque con el núcleo polinomial se alcanza una mejor aproximación como se puede observar en esta misma figura.

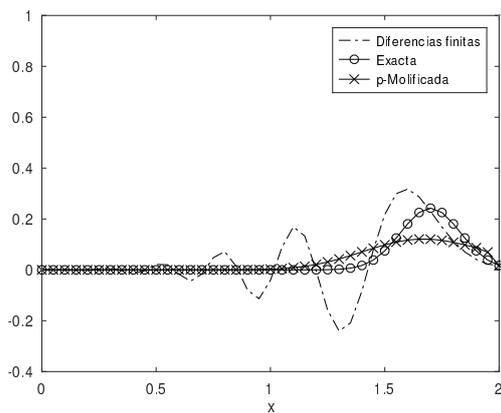


(a) Solución aproximada

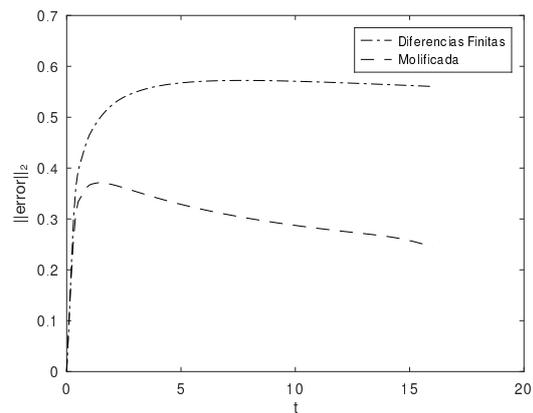


(b) Error de aproximación

Figura 4. Problema de convección dominante: molificación con núcleo gaussiano.



(a) Solución aproximada



(b) Error de aproximación

Figura 5. Problema de convección dominante: molificación con núcleo polinomial.

7. CONCLUSIONES

El método de molificación permite reducir las oscilaciones en los problemas de convección difusión, escogiendo parámetros adecuados para definir el núcleo o la función de molificación. Además del núcleo de Gauss también se pueden usar funciones polinomiales truncadas en el proceso de molificación, obteniendo buenos resultados según se puede observar en los resultados numéricos.

Es recomendable el uso de un método adaptativo para la elección del parámetro δ para minimizar el error de la aproximación, ya que dependiendo de este parámetro se puede modificar el comportamiento de los errores. Con una elección adecuada de dichos parámetros, se observa que los resultados con el método de la molificación son mejores que el método de las diferencias finitas. Es decir, el método de la molificación puede ser empleado para mejorar el método de las diferencias finitas y obtener resultados más estables y más precisos.

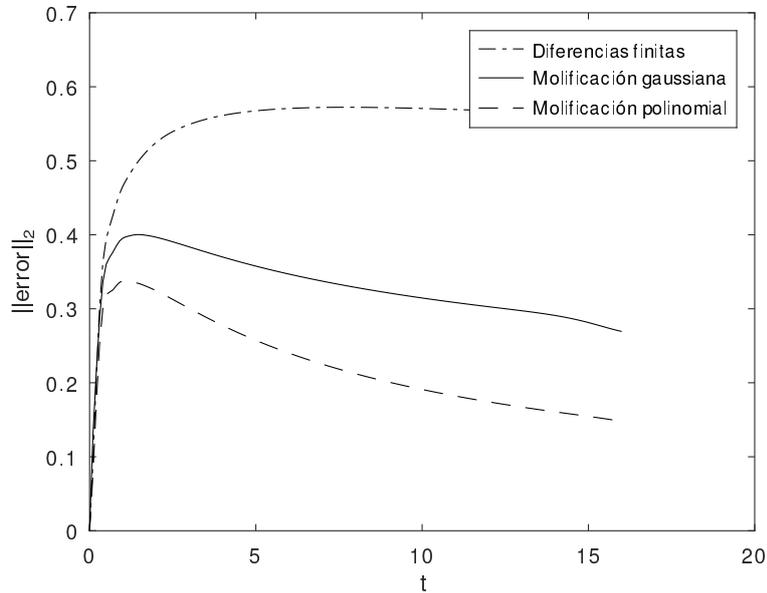


Figura 6. Problema convección dominante: Comparación del error entre mollificación gaussiana y polinomial.

8. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflictos de interés.

9. REFERENCIAS

- Acosta, C. and Mejía, C. (2008). Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(3):368–380.
- Ambardar, A. (2002). *Procesamiento de señales analógicas y digitales*. Thomson Learning. México.
- Gerald, C. and Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con Aplicaciones*. Pearson Educación México.
- Guo, S. J. (1982). On the mollifier approximation for solutions of stochastic differential equations. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 22(2):243–254.
- Marechal, P., Lee, W. S. T., and Triki, F. (2023). A mollifier approach to regularize a cauchy problem for the inhomogeneous helmholtz equation. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 31(5):669–685.
- Mejía, C. (2007). Sobre el método de mollificación. *Trabajo presentado como requisito parcial para promoción a profesor titular, Medellín, Universidad Nacional de Colombia*.



- Mejía, C. E. and Murio, D. A. (1996). Numerical solution of generalized ihcp by discrete mollification. *Computers & Mathematics with Applications*, 32(2):33–50.
- Murio, D. (1993). *The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems*. John Wiley & Sons.
- Nedeljkov, M. and Oberguggenberger, M. (2012). Ordinary differential equations with delta function terms. *Publications de l'Institut Mathematique*, 91(105):125–135.
- Rosales, R. and Díez, P. (2016). Un estimador de error residual semiexplícito en cantidades de interés para un problema mecánico lineal. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 32(4):212–220.
- Royo, J. (2011). *Álgebras y módulos de convolución de tipo Sobolev: Transformada de Laplace e integro-derivación fraccionaria*. Editorial Académica Española.
- Smith, S. (1997). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Pub.
- Smith, S. (2013). *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*. Elsevier Science.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Paulina Alonso	Metodología, revisión, búsqueda bibliográfica y diseño del artículo
Raúl Manzanilla	Concepción, análisis, revisión y redacción
Richard Rosales	Análisis, revisión y redacción