Revista Bases de la Ciencia - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 2, Año 2017, Nº 1 (31-44).

Ciencias Matemáticas

Artículo de Investigación

SOLUCIÓN ANALÍTICA AL PROBLEMA NO HOMOGÉNEO DEL LÁTIGO

MSc. Juan Sabas Salas*; MSc. Glay Cedeño C.; MSc. Victor García P .; MSc. Luis Cobacango L .; MSc. Willam Moreano G .; MSc. José Guanoluiza C .; MSc. Jofre Veliz V .; MSc. Luis Zambrano V .; MSc. Maritza Vélez P

Universidad Técnica de Manabí. Instituto de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas. Portoviejo Manabí-Ecuador.
*Autor para la correspondencia. Email: jsabas@utm.edu.ec

Recibido: 10-01-2017 / Aceptado: 19-4-2017

RESUMEN

Debido a la complejidad del método de solución de superposición de ondas, encontrar soluciones analíticas en las ecuaciones diferenciales parciales se hace complicado. En este artículo presentamos un método teórico de solución al problema general de propagación unidimensional de ondas que permiten dividir el problema en otros de menor complejidad. Aplicando el método de separación de variables de Fourier y la Transformada de Laplace se obtiene detalladamente la solución analítica al problema no homogéneo del látigo.

Palabras clave: Ecuación de onda, Transformada de Laplace, Solución analítica.

ANALYTIC SOLUTION TO THE NON-HOMOGENEOUS WHIP PROBLEM

ABSTRACT

Because of the complexity of the wave overlay solution method, finding analytical solutions in partial differential equations becomes complicated. In this article we present a theoretical method of solution to the general problem of unidimensional propagation of waves which allows the division of the problem into other smaller complexities. Applying the Fourier method of separation of variables and the Laplace transform gives the analytical solution to the non-homogeneous problem of the whip

Key words: wave equation**,** analytical solution, Laplace Transform.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del Siglo XVIII, y que se presenta con relativa frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios, fue el que se conoce con el nombre de **“El problema de la cuerda vibrante o Ecuación de Onda".**

La ecuación de la cuerda vibrante es la primera ecuación diferencial parcial que se descubre en la mecánica y este problema refleja perfectamente la interrelación que siempre ha existido entre la matemática y la física. El problema de la cuerda vibrante consiste en considerar una cuerda elástica de longitud L con los extremos fijos por conveniencia, en los puntos (0; 0) y (L; 0) del eje de abscisas, cuando la cuerda es apartada de su posición de equilibrio esta adopta la forma de una función continua de ecuación, y = f(x) y se suelta. ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda Si los desplazamientos de la cuerda se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular en cualquier momento al eje de abscisas?. Dicho movimiento vendrá descrito por una función u (x; t) que representa el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq L$) y el tiempo t ($t \geq 0$). El problema planteado es obtener u (x; t) a partir de f(x).

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado fue Jean Le Rond D'Alembert, bajo diversas hipótesis referentes fundamentalmente a que las “vibraciones sean pequeñas", demostró en (D'Alembert 1747) que la función U(x,t) satisface el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x.t) = a^2\, \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x.t) \\ U(x,0) = f(x)\ ;\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \\ U(x,0) = 0\ ; U(L,t) = 0\ ;\ t \geq 0 \end{cases}$$

Y cuya solución viene dada por:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{F}(x+t) + \tilde{F}(x-t)\right]$$

Esta solución consiste en la superposición de dos ondas viajeras a través de la cuerda en direcciones opuestas. Para D’Alembert la función de condición inicial f(x) debe ser una función analítica de clase $C^1_{[0,L]}$ cuya gráfica es una curva sin picos, es decir con primera derivada continua en $0 \leq x \leq L$ la cuerda con configuración inicial en forma de triángulo no es considerada “ $C^n_{[0,L]}$ representa el conjunto de funciones que admiten n derivadas continuas en $[0,L]$ “ en 1749, el matemático Leonhar Euler presentó su solución (Euler 1749) y coincidió en gran parte con la solución de D’Alembert, pero añadiendo un carácter más general a la solución y admitiendo que la función f(x) podría presentar puntos no diferenciables ó incluso discontinuidades finitas, es decir continua a tramos. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función. Daniel Bernoulli presentó otra solución a la ecuación de la cuerda, de la forma: (Bernoulli 1753)

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) Sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Donde los coeficientes b_K dependen de las condiciones iniciales. Así, según Bernoulli la cuerda oscila simultáneamente con varias frecuencias, mediante la superposición de ondas senoidales y cosenoidales, planteando de esta manera la posibilidad de desarrollar funciones en series trigonométricas. Esta solución es mucho más significativa desde el punto de vista físico que la de D'Alembert y explica los distintos armónicos que se producen en la vibración de las cuerdas de los instrumentos musicales; sucede que Bernoulli además de ser matemático, también se dedicaba a la física y a la música. Aun siendo correcta la solución de Bernoulli, generó varias críticas por parte de D'Alembert y Euler, que se rehusaban a admitir que una función general pudiera ser expresada en términos de series infinitas de funciones trigonométricas. A pesar de todas las críticas, Bernoulli estaba en lo correcto y su propuesta de desarrollar en series trigonométricas funciones arbitrarias, sería retomada más tarde por Fourier y Dirichlet, en cuyos trabajos constan las bases analíticas que demuestran la posibilidad de dichas expansiones.

El matemático y físico francés Jean Fourier 1822, publicó su libro Théorie Analytique de la Chaleur. Fourier fue pionero en el estudio de la transferencia del calor en sólidos y fue quien dedujo la denominada ecuación del calor, y bien la expansión en series trigonométricas no fue una idea original, el verdadero mérito de él ha sido encontrar el modelo matemático correcto para la conducción del calor, desarrollar el método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) y encontrar su solución analítica mediante la aplicación de series trigonométricas (Dyn McKean 1972).

2. METODOLOGIA

La función U (x,t), que describe las oscilaciones de la cuerda de longitud L , que se encuentra fija en un extremo (x=0) y libre en el otro extremo (x=L) , son gobernadas por el problema **P1.** Ecuación de onda unidimensional no homogéneo con condiciones iniciales no homogéneas, fija en el extremo x=0 y libre en extremo x=L (problema del látigo

P1 $\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x.t) = a^2\, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x.t) + F(x.t) \quad\quad 0 \leq x \leq L\ ;\ \ t \geq 0\ ;\ U(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ U(0,t) = 0\ ;\ U(L,t) = ASen\omega t\ ; U(x,0) = f(x)\ ;\ \frac{\partial U}{\partial t}(x.0) = g(x) \end{cases}$

El problema **P1** se descompone en dos problemas. **P2** y **P3--** $P1 \rightarrow \begin{cases} P2 \\ P3 \end{cases}$

El problema **P2** se descompone en **P4** y **P5--** $P2 \rightarrow \begin{cases} P4 \\ P5 \end{cases}$ y el problema **P3** se descompone en **P5** y **P6--**$P3 \rightarrow \begin{cases} P6 \\ P7 \end{cases}$

$$P1 \rightarrow \begin{cases} P2 \rightarrow \begin{cases} P4 \\ P5 \end{cases} \\ P3 \rightarrow \begin{cases} P6 \\ P7 \end{cases} \end{cases}$$

La suma de las soluciones analítica de **P4, P5, P6** y **P7** constituyen la solución analítica del problema del látigo.

2.1 Solución analítica al problema no homogéneo del látigo.

Supongamos la solución del problema de la ecuación de onda no homogéneo **P1** de la siguiente manera:

$$U(x,t) = H(x,t) + W(x,t) \quad\quad H(x,t)\ ;\ W(x,t) \in C^2_{[0,L]}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x.t) = a^2\, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x.t) + F(x.t) \quad \rightarrow \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = \ a^2 \left(\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right) + F(x.t)$$

De esta igualdad se deducen las ecuaciones:

$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} + F(x.t)\ \ y\ \ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = \ a^2\, \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}$

Considerando las condiciones de borde se tiene:

$$U(0,t)=0\ \rightarrow H(0,t)+W(0,t)=0\ \rightarrow H(0,t)=0\,;W(0,t)=0$$

$$U(L,t)=H(L,t)+W(L,t)=ASen\omega t\quad\rightarrow\quad H(L,t)=0\,;\ W(L,t)=ASen\omega t$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales se tiene:

$$U(x,0)=H(x,0)+W(x,0)=f(x)\rightarrow H(x,0)=f(x);W(x,0)=0$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=g(x)\rightarrow\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}=g(x)\,;\ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=0$$

El problema **P1** se ha descompuesto en dos problemas de menor dificultad **P2** y **P3** es decir: $P1\rightarrow\begin{cases}P2\\P3\end{cases}$

La función $H(x,t)$ satisface el problema de onda no homogéneo con condiciones de borde homogéneas y condiciones iniciales no homogéneas:

$$\textbf{P2}\begin{cases}\dfrac{\partial^2H}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2H}{\partial x^2}+F(x,t)\qquad H(x.t)\in C^2_{[0,L]}\\ H(0,t)=H(L,t)=0\,;\ \ H(x,0)=\ f(x)\ \ ;\quad \dfrac{\partial H}{\partial t}(x,0)=g(x)\end{cases}$$

La función $W(x,t)$ satisface el problema de onda homogéneo con condiciones iniciales homogéneas y en el extremo libre tiene condición de borde no homogéneas.

$$\textbf{P3}\begin{cases}\dfrac{\partial^2W}{\partial t^2}(x.t)=a^2\ \dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}(x.t)\qquad W(x.t)\in C^2_{[0,L]}\\ W(0,t)=0\,;\ W(L,t)=ASen\omega t;\ \ W(x,0)=0\,:\ \ \dfrac{\partial W}{\partial t}(x,0)=0\end{cases}$$

Para buscar la solución analítica **P2** se descompone en dos problemas **P4** y **P5** es decir: $P2 \rightarrow \begin{cases} P4 \\ P5 \end{cases}$

Supongamos la solución analítica al problema **P2** de la siguiente manera:

$$H(x,t) = V(x,t) + B(x,t) \;\; \text{--} \;\; V(x.t); B(x,t) \in C^2_{[0,L]}$$

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + F(x,t) \rightarrow \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} \right) F(x,t)$$

Las funciones $V(x,t) \; y \; B(x,t)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t) \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Considerando las condiciones de borde se tiene:

$$H(0,t) = V(0,t) + B(0,t) = 0 \rightarrow V(0,t) = 0 \, ; B(0,t) = 0$$
$$H(L,t) = V(L,t) + B(L,t) = 0 \rightarrow V(L,t) = 0 \, ; B(L,t) = 0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se tiene:

$$H(x,0) = f(x) \rightarrow V(x,0) + B(x,0) = f(x) \rightarrow V(x,0) = 0 \, ;$$
$$B(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,0) = g(x) \rightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = g(x) \rightarrow \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = g(x) \, ;$$
$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = 0$$

Donde $V(x,t)$ satisface el problema de onda no homogéneo con condiciones iniciales y de borde homogéneos:

P4 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad V(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ V(0,t) = V(L,t) = 0;\ V(x,0) = 0\ ;\ \dfrac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$

$B(x,t)$ Satisface el problema de onda homogéneo con condiciones iniciales no homogéneas y condiciones de borde homogéneas.

P5 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} \qquad B(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ B(0,t) = B(L,t) = 0\ ;\ B(x,0) = f(x)\ ;\ \dfrac{\partial B}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$

Solución a P4

Consideremos la solución de P4 en forma de desarrollo de Fourier con respecto a la variable x, manteniendo a t como parámetro, es decir:

P4.1 V(x,t) = $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Sen(\frac{n\pi}{L})x$

Las funciones $V_n(t)$ determinan de forma unívoca la función V (x, t) solución de P4. Por otro lado tenemos:

P4.2 $\mathrm{F(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\,(t) Sen(\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \quad ;\ F_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(\mathfrak{z},t) Sen(\left(\frac{n\pi}{L}\right)\mathfrak{z}) d\mathfrak{z}$

Reemplazando **P4.2** en **P4** se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{V}_n\,(t) Sen\frac{n\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} a^2\,(\frac{n\pi}{L})^2 V_n Sen\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\,(t) Sen(\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{V}_n\,(t) + (\frac{n\pi}{L})^2 V_n] Sen\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\,(t) Sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

De esta igualdad y de las condiciones de borde de **P4**. Se deduce el problema de Cauchy.

P4.3 $\ddot{V}_n(t) + (\frac{an\pi}{L})^2\, V(T) = F_n(t) \quad ; \quad V_n(0) = 0 \quad ; \quad \dot{V}_n(0) = 0$

Aplicamos la Trasformada de Laplace a **P4.3** para obtener solución analítica de **P4** se tiene.

$$\mathrm{L}[\ddot{V}_n(t)] + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 \mathrm{L}[V_n] = \mathrm{L}[F_n(t)]$$

P4.4 $$V_n(t) = L^{-1}\left[\frac{L[F_n(t)]}{S^2+(\frac{an\pi}{L})^2}\right] = F_n(t) * L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2}\right]$$

$$= F_n(t) * \frac{L}{an\pi} Sen \frac{an\pi}{L} t = \frac{L}{n\pi a}\int_0^t Sen \frac{n\pi a}{l}(t-\mathfrak{z})F_n(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}$$

Reemplazando **P4.4** en **P4.1** se tiene:

P4.5 $$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{L}{n\pi a}\int_0^t Sen \frac{n\pi a}{L}(t-\mathfrak{z})F_n(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}\right) Sen \frac{n\pi}{L} x$$

La función V(x,t) representada por **P4.5** constituye la solución analítica del problema **P4.**

Para obtener solución analítica a **P5**

$$\boldsymbol{P5} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} \\ B(0,t) = B(L,t) = 0; \quad B(x,0) = f(x) \quad ; \quad \dfrac{\partial B}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Buscamos solución no trivial de **P5** que satisfacen las condiciones:

$B(0,t) = B(L,t) = 0$ Separando variables, es decir: $B(x,t) = X(x)T(t)$ y reemplazando en **P5** se tiene (Haberman 1998):

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

El primer miembro de esta ecuación depende de x y el segundo depende de t. Por lo tanto, cada miembro es constante. Sea λ la constante y se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 & (i\,) \\ \ddot{T}(t) - \lambda a^2 T(t) = 0 & (ii) \end{cases}$$

Usando las condiciones de borde. X (0) = X (L) = 0 se obtienen soluciones no triviales.

$X_k(x) = \gamma_k(x) Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right) x$; Para $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ y k positivo.

La ecuación: $T^{\circ\circ}(t) + \frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2} T(t) = 0$ tiene solución general

$T_K(t) = \alpha_k Cos\left(\frac{k\pi}{L} at\right) + \beta_k Sen(\frac{k\pi}{L} at)$ Para cada entero positivo k las solucions de (i) son de la forma.

$B_k(x,t) = \left\{A_k Cos\left(\frac{k\pi}{L} at\right) + \beta_k Sen(\frac{k\pi}{L} at)\right\} Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right) x$ Con A_k y β_k constantes reales. La solución de (i) se puede escribir de la forma $B(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x,t)$ por las condiciones iniciales se tiene.

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(x,0) = f(x) \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \beta_K}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right) x = f(x) \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} a\beta_k Cos\left(\frac{k\pi}{L} ax\right) = g(x)$$

Son las series de Fourier de f(x) y g(x) . con coeficientes de Fourier .

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) Sen(\frac{k\pi x}{L}) dx \quad y \quad \beta_K = \frac{2}{k\pi a}\int_0^L g(x) Cos(\frac{k\pi x}{L}) dx$$

La solucion analitica al problema **P5** de la cuerda unidimensional con condiciones iniciales dadas (D'Alembert 1747)

$$B(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{A_k Cos\left(\frac{k\pi}{L} at\right) + \beta_k Sen\left(\frac{k\pi}{L} at\right)\right\} Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right) x$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)Sen(\frac{k\pi x}{L})dx\right]Cos\left(\frac{k\pi}{L}at\right)+\right.$$
$$\left.+\ \left[\frac{2}{k\pi a}\int_0^L g(x)Cos(\frac{k\pi x}{L})dx\right]Sen\left(\frac{k\pi}{L}at\right)\right\}Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right)x$$

Para buscar la solución analítica a **P3** se descompone en los problemas **P6** y **P7** es decir:

$$P3 \rightarrow \begin{cases} P6 \\ P7 \end{cases}$$

Buscamos la solución analítica a **P3**

P3 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x.t) = a^2\,\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x.t) \qquad W(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ W(0,t) = 0\,;\ W(L,t) = ASen\omega t; W(x,0) = 0\,; \dfrac{\partial W}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$

Para obtener solución analítica a **P3** tenemos que descomponer:

P3.1 $\qquad W(x,t) = \vartheta(x,t) + \theta(x,t)$

Donde $\vartheta(x,t)$ satisface el problema:

P6 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}(x.t) = a^2\,\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}(x.t) \qquad \vartheta(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ \vartheta(0,t) = 0 \ \ ;\ \ \vartheta(L,t) = ASen\omega t \end{cases}$

Separando variables se tiene: $\vartheta(x,t) = X(x)T(t)$

$$\rightarrow \begin{cases} \ddot{X} - \gamma X = 0\,; \quad X(0) = 0 & P6.1 \\ \ddot{T} - \gamma a^2 T = 0 & P6.2 \end{cases}$$

$$\vartheta(0,\mathrm{t}) = X(0)T(t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

$$\vartheta(\mathrm{L},\mathrm{t}) = X(L)T(t) = ASen\omega t \rightarrow T(t) = \frac{ASen\omega t}{X(L)} \ \rightarrow \ddot{T} = \frac{-A\omega^2 Sen\omega t}{X(L)}$$

Sustituyendo en **P6.2**

$-\frac{A}{X(L)}[\omega^2 + a^2\gamma]Sen(\omega t) = 0 \ \rightarrow \gamma = -\frac{\omega^2}{a^2}$ Al sustituir en P6.1 tenemos la ecuación. $\ddot{X} + \frac{\omega^2}{a^2}X = 0 \ ; X(0) = 0$ Con solución $X(x) = C_1 Sen\left(\frac{\omega}{a}x\right)$

$$como \ \mathrm{X(L)} = Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right) \ reemplazando \ en \ T(t) se \ tiene:$$

$$T(t) = \frac{ASen(\omega t)}{C_1 Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}$$

De esta forma se ha obtenido la función analítica solución a **P6**

$$\vartheta(L,t) = X(x)T(t) = \frac{ASen(\omega t)Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}$$

Por **P3.1** se tiene:

$$W(x,t) = \theta(x,t) + \vartheta(x,t) = \theta(x,t) + \frac{ASen(\omega t)Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}$$

Como $W(x,t)$ es solución de P3 se tiene:

$$W(x,t) = \theta(x,t) + \frac{ASen(\omega t)Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{A\frac{\omega}{a}Sen(\omega t)Cos(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)} + \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{-A(\frac{\omega}{a})^2 Sen(\frac{wx}{a})Sen(\omega t)}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{AwSen(\frac{wx}{a})Cos(\omega t)}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)} + \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{-A\omega^2 Sen(\frac{wx}{a})Sen(\omega t)}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Usando las condiciones iniciales y de borde para para W(x.t) se tiene:

$$W(x,0) = \theta(x,0) = 0 \ ; \ W(l,0) = \theta(l,0) = 0$$

$$\frac{\partial W(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial\left[\frac{ASen(\omega t)Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}\right]}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}=\frac{-A\omega Sen\left(\frac{wx}{a}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}$$

De estas ecuaciones y **P3** se deduce que $\theta(x,t)$ satisface la ecuación de onda homogénea con condición de borde homogéneas y velocidad inicial no homogénea.

$$\textbf{P7}\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x.t)=a^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x.t) \quad \theta(x.t)\in C^2_{[0,L]} \\ \theta(0,t)=\theta(L,t)=0\,;\theta(x,0)=0\,;\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,0)=-\frac{A\omega Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)} \end{cases}$$

Separando variables se tiene la solución analítica de **P7**:

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)Sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$B_n=-\frac{2A\omega}{n\pi aSen\left(\frac{\omega L}{a}\right)}\int_0^L Sen(\frac{\omega}{a}x)Sen(\frac{n\pi}{L}\;x)dx$$

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2A\omega}{n\pi aSen\left(\frac{\omega L}{a}\right)}\int_0^L Sen(\frac{\omega}{a}x)Sen(\frac{n\pi}{L}\;x)dx\right]Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)Sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

De esta manera hemos obtenido la solución analítica al problema del látigo:

$$\boldsymbol{U(x,t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{L}{n\pi a}\int_0^t Sen\frac{n\pi a}{L}(t-\mathfrak{z})F_n(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}\right)Sen\frac{n\pi}{L}x+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)Sen(\frac{k\pi x}{L})dx\right]Cos\left(\frac{k\pi}{L}at\right)+\right.$$
$$\left.\left[\frac{2}{k\pi a}\int_0^L g(x)Cos(\frac{k\pi x}{L})dx\right]Sen\left(\frac{k\pi}{L}at\right)\right\}Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right)x+\frac{ASen(\omega t)Sen(\frac{wx}{a})}{Sen\left(\frac{\omega}{a}L\right)}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2A\omega}{n\pi aSen\left(\frac{\omega L}{a}\right)}\int_0^L Sen(\frac{\omega}{a}x)Sen(\frac{n\pi}{L}\;x)dx\right]Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)Sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

Teorema.

Dadas f,g : $[0,L]$ → R tales que f,g $\epsilon C^2[0,L]$ y

$$f(0)=\;f^{\circ\circ}(0)=f(L)=f^{\circ\circ}(L)=0=g(0)=\;g^{\circ\circ}(0)$$

Para $k\geq 1$

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)Sen(\frac{k\pi x}{L})dx \quad y \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^L g(x)Cos(\frac{k\pi x}{L})dx$$

Entonces la serie:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{A_k Cos\left(\frac{k\pi}{L}at\right) + B_k Sen\left(\frac{k\pi}{L}at\right)\right\} Sen\left(\frac{k\pi}{L}\right)x$$

Converge uniformemente y absolutamente a la solucion del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x.t) = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(x.t) \qquad U(x.t) \in C^2_{[0,L]} \\ U(0,t) = U(L,t) = 0\,; U(x,0) = f(x); U_t(x.0) = g(x)\ ;\ t \geq 0 \end{cases}$$

Ecuación de onda homogénea con condiciones iniciales no homogénea (Dyn McKeon, 1972). Este Teorema de la convergencia uniforme y absoluta justifica los cálculos realizados en este trabajo.

3. CONCLUSIÓN

Debido a la dificultad de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para obtener solución analítica y al análisis numérico, los métodos de solución exacta se dificultan. En este artículo se presenta un método para obtener solución analítica al problema del látigo descomponiéndolo en 6 problemas de menor dificultad según el siguiente diagrama:

$$P1 \rightarrow \begin{cases} P2 \rightarrow \begin{cases} P4 \\ P5 \end{cases} \\ P3 \rightarrow \begin{cases} P6 \\ P7 \end{cases} \end{cases}$$

4. REFERENCIAS

Bernoulli Daniel. (1753). Réflexions et èclarcissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mèmoires de l´Académie (Hist. de l'Acad. de Berlin) 9,147-195.

D'Alembert Jean Le Rond. (1747). Cordes vibrantes. (Hist. de l'Acad. de Berlin) 3,214,219.

Dym McKean. (1972). Fourier Series and Integrals. Academic Press New York.

Euler Leonhar. (1748). nouvelles vibrations des cordes. (Mora Acta Erud) 512-527

Fourier Joseph Jean Baptiste. (1822). Théorie Analytique de la Chaleur (Firmin Didot, Père et Fìls, Paris).

Haberman R. (1998). Elementary Applied Partial Differential Equations, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Tyler McMillan Alain Goriely. (2003). Whip waves. Physica D 184, 192–225.

ISNN 2588-0764