Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
Revista Científica
Facultad de Ciencias Básicas
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Ciencias Matemáticas

EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ A PARTIR DEL TEOREMA DE KREIN-MILMAN

THE RIESZ REPRESENTATION THEOREM DERIVED FROM THE KREIN-MILMAN THEOREM

O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ DERIVADO DO TEOREMA DE KREIN-MILMAN

Autores:

Carlos Eduardo Cova Salaya[1,2,*]

carlos.cova@espoch.edu.ec

[1]Escuela Superior Politécnica de Chimborazo , Riobamba, Ecuador

[2]Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

[*] Autor para correspondencia.

Editor Académico

Benjamin De Zayas Nuñez

Citación sugerida: Cova Salaya, C.E. (2025). El teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman. *Revista Bases de la Ciencia, 10(2)*, 39-55. DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Recibido: 18/05/2025
Aceptado: 15/08/2025
Publicado: 20/08/2025

Resumen

A partir del *teorema de Krein-Milman* (en su versión baricéntrica), es posible demostrar el *teorema de representación de Riesz*. Sin embargo, la prueba clásica de la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman depende a su vez del teorema de representación de Riesz, lo que genera una dependencia circular. Mediante caracterizaciones de la convergencia de redes en la *topología Lévy* sobre el espacio

$$orba^+ = \{\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \mid \mu \text{ es aditiva, positiva y exteriormente regular}\},$$

donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos del espacio normal y Hausdorff Ω, que contiene a los abiertos de Ω; establecemos los resultados necesarios para demostrar la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman sin apelar al teorema de representación de Riesz. Como consecuencia, obtenemos una demostración del *teorema de representación de Riesz* que depende únicamente de la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman, eliminando así la circularidad en el razonamiento clásico.

Palabras clave: Teorema de Krein-Milman, Teorema de Representación de Riesz, Topología Lévy, Medidas exteriores regulares, Versión baricéntrica.

Abstract

From the *Krein-Milman theorem* (in its barycentric version), one can derive a proof of the *Riesz representation theorem*. However, the classical proof of the barycentric version of the Krein-Milman theorem itself depends on the Riesz representation theorem, creating a circular dependency. Using characterizations of net convergence in the *Lévy topology* on the space

$$orba^+ = \{\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \mid \mu \text{ is additive, positive and outer regular}\},$$

where $\mathcal{A}$ is an algebra of sets of the normal Hausdorff space Ω, containing the open sets of Ω; we establish the necessary results to prove the barycentric version of the Krein-Milman theorem without relying on the Riesz representation theorem. As a consequence, we obtain a proof of the *Riesz representation theorem* that depends solely on the barycentric version of the Krein-Milman theorem, thereby removing the circularity in the classical reasoning.

Keywords: Krein-Milman theorem, Riesz representation theorem, Lévy topology, Outer regular measures, Barycentric version.

Resumo

A partir do *teorema de Krein-Milman* (em sua versão baricêntrica), é possível demonstrar o *teorema de representação de Riesz*. Contudo, a prova clássica da versão baricêntrica do teorema de Krein-Milman depende por sua vez do teorema de representação de Riesz, o que gera uma dependência circular. Mediante caracterizações da convergência de redes na *topologia de Lévy* sobre o espaço

$$orba^+ = \{\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \mid \mu \text{ é aditiva, positiva e externamente regular}\},$$

onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de conjuntos do espaço normal e Hausdorff Ω, que contém os abertos de Ω; estabelecemos os resultados necessários para demonstrar a versão baricêntrica do teorema de Krein-Milman sem recorrer ao teorema de representação de Riesz. Como consequência, obtemos uma demonstração do *teorema de representação de Riesz* que depende exclusivamente da versão baricêntrica do teorema de Krein-Milman, eliminando assim a circularidade no raciocínio clássico.

Palavras chave: Teorema de Krein-Milman, Teorema de Representação de Riesz, Topologia de Lévy, Medidas externamente regulares, Versão baricêntrica.

Universidad Técnica de Manabí
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
Revista Científica
Facultad de Ciencias Básicas
Portoviejo - Manabí - Ecuador

1. Introducción

En Phelps 2001 se demuestra la equivalencia entre el teorema de Krein-Milman (2.4) y su versión baricentrica. La prueba de este resultado está basada en el siguiente lema:

Si K es un conjunto compacto no-vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X. Entonces $x \in \overline{Co}(K)$ si y solo si existe una medida boreliana y regular μ de probabilidad en K, tal que x es su baricentro.

La demostración de este lema utiliza el teorema de representación de Riesz en $C(K)$. A partir de la versión baricentrica del teorema de Krein-Milman podemos deducir el teorema de representación de Riesz. Pero en este momento, el teorema de Krein-Milman no implica el teorema de representación de Riesz, ya que este último fue utilizado para probar la equivalencia entre el primero y su versión baricentrica, como observamos antes. Nuestro objetivo, para obtener el teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman, es establecer el lema mencionado, sin ninguna dependencia del teorema de representación de Riesz.

2. Preliminares

Los conceptos y resultados presentados en esta sección son clásicos y fundamentales en la literatura especializada. Para un tratamiento riguroso de estos temas, el lector interesado puede referirse a (Boyd & Vandenberghe, 2004; Dunford & Schwartz, 1957; Guerra & Jiménez, 2010; Hiriart-Urruty & Lemaréchal, 2001; Phelps, 2001; Rockafellar, 1970; Rudin, 2012) para espacios localmente convexos y normados. Para medida e integración a (Aliprantis & Border, 2006; Bogachev, 2007; Cohn, 2013; Conway, 1990; Dunford & Schwartz, 1957; Folland, 1999; Panchapagesan, 1991; Rudin, 1987, 2012). Para puntos extremales a (Aliprantis & Border, 2006; Bogachev, 2007; Conway, 1990; Dunford & Schwartz, 1957; Guerra & Jiménez, 2010; Megginson, 1998; Phelps, 2001; Rudin, 2012).

2.1. Espacios localmente convexos y normados

En toda esta sección X denotará un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. *Sea X un espacio vectorial.*

(c) *Sea K un subconjunto no-vacío de X. Un elemento $x \in X$ se llama un* punto extremal *de K si $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ con $y, z \in K$ y $0 < \lambda < 1$ implica que $x = y = z$.*

El conjunto de los puntos extremales *de K lo denotamos por $EXT(K)$. (Es posible que $EXT(K)$ sea vacío).*

Definición 2.2. *Sea X un espacio vectorial.*

1. *Si $A \subseteq X$, el menor conjunto convexo en X que contiene a A se llama* la cápsula convexa *de A y se denota $Co(A)$.*
2. *Si X es vectorial topológico y $A \subseteq X$, el menor conjunto convexo y cerrado que contiene a A se llama* la cápsula convexa cerrada *de A y se denota $\overline{Co}(A)$.*

Teorema 2.3. *Sea A un conjunto en un espacio vectorial X. Entonces:*

(i) $Co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, x_i \in A \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$

(ii) *Si A_i es convexo para $i = 1, \ldots, n$, entonces* $Co\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in A_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$

(iii) *Si X es vectorial topológico, entonces $\overline{Co}(A) = \overline{Co(A)}$.*

(iv) *Si X es vectorial topológico y K_i es convexo y compacto en X, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $\overline{Co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)$ es compacto y además $\overline{Co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = Co\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)$.*

Teorema 2.4 (de Krein-Milman). *Sea X un espacio localmente convexo y Hausdorff. Si K es compacto y convexo no–vacío en X, entonces K coincide con la cápsula convexa cerrada de sus puntos extremales. Esto es, $K = \overline{Co}\left(EXT(K)\right)$.*

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

2.2. Medida e integración

Definición 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Ω. Definimos los siguientes conjuntos:*

(i) $ba(\mathcal{A}) = \{\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K} : \mu \text{ aditiva y acotada}\}$, *$\mu$ acotada en el siguiente sentido:* $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) $ba^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in ba(\mathcal{A}) : \mu \geq 0\}$.

(iii) $ca(\mathcal{A}) = \{\mu \in ba(\mathcal{A}) : \mu\ \sigma\text{–aditiva}\}$.

(iv) $ca^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in ca(\mathcal{A}) : \mu \geq 0\}$.

Definición 2.6. *Sea S un espacio compacto y Hausdorff y sea Σ una σ-álgebra de conjuntos de S que contiene los abiertos de S. Si $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es σ-aditiva, decimos que μ es* regular *si*

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : V \text{ abierto en } S \text{ y } E \subseteq V\} = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto en } S \text{ y } K \subseteq E\},\ \forall E \in \Sigma.$$

Denotamos $rca^+(\Sigma) = \{\mu \in ca^+(\Sigma) : \mu \text{ regular}\}$.

Teorema 2.7. *Sea $\mu \in ba(\mathcal{A})$ (resp. $ca(\mathcal{A})$) donde $\mathcal{A}$ es un álgebra (resp. σ-álgebra) de Ω. Entonces para las operaciones de adición y multiplicación escalar definidas conjunto por conjunto, ellos son espacios vectoriales. Si $\|\mu\|_\infty = \sup\{\|\mu(A)\| : A \in \mathcal{A}\}$, $\mu \in ba(\mathcal{A})$, entonces $\|\cdot\|_\infty$ es una norma y $ba(\mathcal{A})$ (resp. $ca(\mathcal{A})$) es un espacio de Banach con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.*

Definición 2.8. *Sea Ω un espacio topológico. Una medida $\mu : B(\Omega) \to [0,1]$ con $\mu(\Omega) = 1$ se llama una* medida boreliana de probabilidad *en Ω. Cuando Ω es compacto y Hausdorff, y además μ es regular, se dice que μ es una* medida boreliana y regular de probabilidad *en Ω.*

Teorema 2.9. *Sea Ω un espacio topológico y sean $C_b(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ continua y acotada}\}$ y $\|f\|_\infty = \sup\{|f(w)| : w \in \Omega\}$, $\quad f \in C_b(\Omega)$. Entonces:*

(i) $(C_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

(ii) Si $\Omega = S$ es compacto y Hausdorff, entonces $C_b(S) = C(S) = \{f\colon S \to \mathbb{K} : f \text{ continua}\}$ y así $C(S)$ con $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.10 (de representación de Riesz en $C(S)$, S compacto y Hausdorff). *Sea S compacto y Hausdorff y sea $\Lambda : C(S) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal y positivo. Entonces existe una única medida μ boreliana y regular en S tal que $\Lambda(f) = \int_S f\, d\mu$ para todo $f \in C(S)$.*

2.3. Los puntos extremales de $B_{C(S)^*}$, S compacto y Hausdorff

Lema 2.11. *Sea K un conjunto compacto y no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff E, y supongamos que $\overline{Co}(K)$ es compacto. Entonces $EXT\left(\overline{Co}(K)\right) \subseteq K$.*

Lema 2.12. *Sea S compacto y Hausdorff y sea $\mathcal{X}$ un subespacio vectorial cerrado de $C(S)$. Para cada $s \in S$, sea δ_s el funcional sobre $C(S)$ tal que $\delta_s(f) = f(s)$, $f \in C(S)$. Entonces, cada punto extremal de la bola unitaria cerrada $B_{\mathcal{X}^*}$ de $\mathcal{X}^*$ es de la forma $\alpha\delta_s$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y algún $s \in S$.*

Teorema 2.13 (Descripción de $EXT(B_{C(S)^*})$). *Si S es compacto y Hausdorff, entonces $EXT(B_{C(S)^*}) = \{\alpha\delta_s : \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \text{ y } s \in S\}$.*

El teorema anterior, permite identificar S con el subconjunto $\{\delta_s : s \in S\}$ de $EXT(B_{C(S)^*})$ mediante la aplicación $s \to \delta_s$. El próximo resultado dice que esta aplicación es un homeomorfismo, cuando su rango se dota de la topología débil* de $C(S)^*$.

Teorema 2.14 (Identificación topológica de S en $B_{C(S)^*}$). *Sea $T\colon S \to EXT(B_{C(S)^*})$ la aplicación dada por $T(s) = \delta_s$. Si $\hat{S} = \{\delta_s : s \in S\}$, entonces $T\colon (S,\tau) \longrightarrow \left(\hat{S}, \sigma(C(S)^*, C(S))|_{\hat{S}}\right)$ es un homeomorfismo, donde τ es la topología compacta y Hausdorff de S.*

ISSN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Por último, como una aplicación de los dos teoremas anteriores, se tiene el siguiente resultado; que motiva el estudio presentado en la próxima sección.

Teorema 2.15. *Sea S compacto y Hausdorff, y sea $P = \{x^* \in C(S)^* : \|x^*\| = x^*(1) = 1\}$. Entonces:*

(i) P es compacto en la topología débil* de $C(S)^*$.

(ii) P es un subconjunto convexo de $C(S)^*$ y cada elemento de P es un funcional positivo.

(iii) (a) $EXT(P) = \{\delta_s : s \in S\}$.
(b) $EXT(P)$ con la topología débil* de $C(S)^*$ es homeomorfo con S, y en consecuencia débil*-compacto.

(iv) Para cada $x^* \in P$ existe una única medida μ_{x^*} boreliana y regular de probabilidad en P, tal que $f(x^*) = \int_P f \, d\mu_{x^*}$ para todo $f \in C(S)$ (aquí $f \in C(S)$ como elemento del dual de $C(S)^*$ con la topología débil*). Además, μ_{x^*} es soportada por $EXT(P)$ en el siguiente sentido:
$\mu_{x^*}(P \setminus EXT(P)) = 0$.

2.4. La versión baricentrica del teorema de Krein-Milman

Utilizando el teorema de representación de Riesz, se caracteriza la cápsula convexa cerrada de un compacto K no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X, en términos de baricentros de medidas borelianas y regulares de probabilidad en K. Este resultado se utiliza para dar la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman.

Definición 2.16. *Sean K un subconjunto no vacío y compacto de un espacio localmente convexo y Hausdorff X, y μ una medida boreliana y regular de probabilidad en K. Decimos que un elemento x en K es el* baricentro *de μ si $x^*(x) = \int_K x^* \, d\mu$ para todo $x^* \in X^*$.*

En términos de la definición anterior, podemos enunciar (iv) del teorema 2.15 en la siguiente forma.

Teorema 2.17. *Sea $P = \{x^* \in C(S)^* : \|x^*\| = x^*(1) = 1\}$. Entonces cada $x^* \in P$ es el baricentro de una medida boreliana y regular de probabilidad μ_{x^*} en P, la cual es soportada por $EXT(P)$.*

Lema 2.18 (Caracterización de $\overline{Co}(K)$ en términos de baricentros). *Sea K un compacto no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X. Entonces $x \in \overline{Co}(K)$ si y sólo si existe una medida boreliana y regular de probabilidad en K, tal que x es el baricentro de esta medida. (Proposición 1.2 en (Phelps, 2001))*

Teorema 2.19 (La versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman). *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) **Teorema de Krein-Milman.** *Sea K un conjunto convexo y compacto no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X. Entonces $K = \overline{Co}\,(EXT(K))$.*

(ii) **Versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman.** *Sea K como en (i). Entonces cada $x \in K$ es el baricentro de una medida boreliana y regular de probabilidad en K, la cual es soportada por la clausura de los puntos extremales de K.*

Demostración.

(i)⇒(ii) Sea K un conjunto convexo y compacto no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X. Si $x \in K$, de (i) se sigue que $x \in K = \overline{Co}(EXT(K)) = \overline{Co}\left(\overline{EXT(K)}\right)$. Como $\overline{EXT(K)}$ es compacto, pues es cerrado y está contenido en K, del lema 2.18 se tiene que existe una medida μ boreliana y regular de probabilidad en $\overline{EXT(K)}$ tal que

$$x^*(x) = \int_{\overline{EXT(K)}} x^* \, d\mu, \quad \forall x^* \in X^*. \tag{2.1}$$

Definiendo $\hat{\mu}$ en $\mathcal{B}(K)$ por $\hat{\mu}(A) = \mu\left(A \cap \overline{EXT(K)}\right)$, $A \in \mathcal{B}(K)$; $\hat{\mu}$ es una medida boreliana y regular de probabilidad en K tal que $\hat{\mu}\left(K \setminus \overline{EXT(K)}\right) = \mu(\emptyset) = 0$. De esto y la identidad (2.1) se sigue que $x^*(x) = \int_K x^* \, d\hat{\mu}, \quad \forall x^* \in X^*$.

Así x es el baricentro de una medida $\hat{\mu}$ boreliana y regular de probabilidad en K, la cual es soportada por $\overline{EXT(K)}$.

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

(ii)⇒(i) Sea K un conjunto convexo y compacto no vacío en un espacio localmente convexo y Hausdorff X. Si $x \in K$, por hipótesis x es el baricentro de una medida μ boreliana y regular de probabilidad en K, la cual es soportada por $\overline{EXT(K)}$. Así, $\mu(K) = 1$ y $\mu\left(K \setminus \overline{EXT(K)}\right) = 0$; y en consecuencia,

$$\mu\left(\overline{EXT(K)}\right) = \mu(K) - \mu\left(K \setminus \overline{EXT(K)}\right) = \mu(K) = 1.$$

Por lo tanto $\overline{EXT(K)} \neq \emptyset$ y además compacto. Se sigue del lema 2.18 que
$x \in \overline{Co}\left(\overline{EXT(K)}\right) = \overline{Co}(EXT(K))$.

Esto prueba que $K \subseteq \overline{Co}(EXT(K))$ y en consecuencia $K = \overline{Co}(EXT(K))$. □

2.5. Deducción del teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman.

A partir de la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman podemos deducir el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales y positivos en $C(S)^*$, con S compacto y Hausdorff.

En efecto, en el teorema 2.15 vimos que el conjunto
$P = \{x^* \in C(S)^* : \|x^*\| = x^*(1) = 1\} = \{x^* \in C(S)^* : \|x^*\| = 1 \text{ y } x^* \text{ positivo}\}$ es convexo y compacto en la topología débil* del espacio localmente convexo y Hausdorff $C(S)^*$.

De la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman, cada $x^* \in P$ es el baricentro de una medida $\overline{\mu}_{x^*}$ boreliana y regular de probabilidad en P, la cual es soportada por $\overline{EXT(P)}$. También, en 2.15 teníamos que hay un homeomorfismo $\Phi : S \to EXT(P)$, y en consecuencia $\overline{EXT(P)} = EXT(P)$. Así, tenemos que

$$f(x^*) = \int_{EXT(P)} f\, d\mu_{x^*} \tag{2.2}$$

para todo $f \in C(S) = (C(S)^*, \sigma(C(S)^*, C(S)))^*$.

Si definimos $\hat{\mu}_{x^*}(A) = \overline{\mu}_{x^*}(\Phi(A))$, $A \in \mathcal{B}(S)$, tenemos que $\hat{\mu}_{x^*}$ es una medida boreliana y regular de probabilidad en S, y la identidad (2.2) es equivalente a $x^*(f) = \int_S f\, d\hat{\mu}_{x^*}$, $\forall f \in C(S)$.

En general, si $x^* \in C(S)^*$ es positivo y no nulo, entonces $x^*/\|x^*\|$ está en P y por tanto existe una medida $\hat{\mu}_{x^*}$ boreliana y regular de probabilidad en S tal que

$$\frac{x^*(f)}{\|x^*\|} = \int_S f\, d\hat{\mu}_{x^*}, \quad \forall f \in C(S). \tag{2.3}$$

Luego, $\mu_{x^*} = \|x^*\|\hat{\mu}_{x^*}$ es una medida boreliana y regular en S, y la identidad (2.3) se transforma en $x^*(f) = \int_S f\, d\mu_{x^*}$, $\forall f \in C(S)$.

Para ver que μ_{x^*} es única, supongamos que ν es una medida boreliana y regular en S tal que $x^*(f) = \int_S f\, d\nu$, $\forall f \in C(S)$. Si K es compacto en S; dado $\epsilon > 0$, por la regularidad de μ_{x^*} y ν, existe un abierto U en S con $K \subseteq U$ tal que $\mu_{x^*}(U) < \mu_{x^*}(K) + \epsilon$ y $\nu(U) < \nu(K) + \epsilon$. Por el lema de Urysohn, existe $f \in C(S)$ con $0 \leq f \leq 1$ tal que $f(K) = \{1\}$ y $f(S \setminus U) = \{0\}$, y en consecuencia $\mu_{x^*}(K) \leq \int_S f\, d\mu_{x^*} = \int_S f\, d\nu \leq \nu(U) < \nu(K) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\mu_{x^*}(K) \leq \nu(K)$. De manera análoga $\nu(K) \leq \mu_{x^*}(K)$, y en consecuencia $\mu_{x^*}(K) = \nu(K)$ para todo compacto K en S. Se sigue de la regularidad de μ_{x^*} y ν que $\mu_{x^*} = \nu$.

Así queda establecido el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos en $C(S)$, con S compacto y Hausdorff.

Desafortunadamente el teorema 2.19, que se usó en la discusión anterior, fue deducido del lema 2.18; en cuya demostración se utiliza el teorema de representación de Riesz (Proposición 1.2 en (Phelps, 2001)). Por lo tanto, en esta discusión el teorema de representación de Riesz no es efectivamente una consecuencia del teorema de Krein-Milman. Así, para obtener el teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman, tenemos que establecer el lema 2.18 sin ninguna referencia al teorema de representación de Riesz.

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec

ISSN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Masani 2006 dio las herramientas necesarias para definir una topología en la colección de las medidas borelianas y regulares en S, tal que la subcolección de las medidas borelianas y regulares de probabilidad forman un compacto, y la convergencia es caracterizada por la convergencia débil* en $C(S)^*$. El objetivo de las siguientes secciones es el de definir esta topología y caracterización de la convergencia para establecer el lema 2.18 sin ninguna referencia al teorema de representación de Riesz.

3. Conjuntos de frontera μ-negligible

Si Ω es un espacio normal y Hausdorff, y $\mathcal{A}$ es un álgebra de Ω que contiene a los abiertos de Ω, entonces para cada $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ demostramos que $\mathcal{A}_\mu^\partial = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\partial A) = 0\}$ es un álgebra contenida en $\mathcal{A}$ y que las funciones en $C_b(\Omega)$ pueden aproximarse por sucesiones de funciones $\mathcal{A}_\mu^\partial -$ simples.

También probamos que para una cierta topología de $\wp(\Omega)$, la colección $\tau_\mu = \tau \cap \mathcal{A}_\mu^\partial$, donde τ es la topología de Ω, es densa.

Los conjuntos $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{A}_\mu^\theta$, τ_μ y $\tau_{\mu,\nu}$

Antes de comenzar la sección, fijaremos la notación a usar:

- Ω es un espacio normal y Hausdorff, con topología τ.
- $\mathcal{C}_\tau$ es la colección de los conjuntos cerrados de Ω.
- $\mathcal{K}$ es la colección de los conjuntos compactos de Ω.
- $\mathcal{A}$ denotará un álgebra de Ω conteniendo los abiertos en Ω, esto es $\tau \subseteq \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}(\tau)$ denotará el álgebra generada por τ.

Recordemos de la definición 2.5 que $ba(\mathcal{A}) = \{\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ aditiva y acotada}\}$ y $ba^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in ba(\mathcal{A}) \mid \mu \geq 0\}$.

Para $\mu, \nu \in ba^+(\mathcal{A})$, sean:

- $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$ y $\mathcal{A}_\mu^\partial = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(\partial A) = 0\}$.
- $\tau_\mu = \tau \cap \mathcal{A}_\mu^\partial = \{U \in \tau \mid \mu(\partial U) = 0\}$ y $\tau_{\mu,\nu} = \tau_\mu \cap \tau_\nu$.

Para $A, B \subseteq \Omega$, sea $I(A,B) = \{C \subseteq \Omega \mid A \subseteq C \subseteq B\}$, y nótese que $I(A,B) = \emptyset$ si $A \nsubseteq B$.

Definición 3.1. *Sea $B = \{I(C,U) : C \in \mathcal{C}_\tau \text{ y } U \in \tau\}$, y observemos que $I(C_1, U_1) \bigcap I(C_2, U_2) = I(C_1 \cup C_2, U_1 \cap U_2)$, esto es, B es cerrado por intersecciones finitas. Además, $I(\emptyset, \Omega) = \wp(\Omega)$, la clase de todos los subconjuntos de Ω. Así, B es una base para una topología $\tau_{\wp(\Omega)}$ en $\wp(\Omega)$.*

Lema 3.2. *Sean $U \in \tau$ y $C \in \mathcal{C}_\tau$ con $C \subseteq U$. Entonces, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

(i) $I(C,U)$ contiene algún abierto y cerrado en Ω.

(ii) Existe una familia $\{U_r : 0 < r < 1\}$ de conjuntos abiertos en Ω tal que $C \subseteq U_r \subseteq \overline{U}_r \subseteq U$ y $\partial U_r \neq \emptyset$ para $0 < r < 1$. Además, $\partial U_r \cap \partial U_{r'} = \emptyset$ para $r \neq r'$. Por consiguiente, $\{U_r : 0 < r < 1\}$ y $\{\partial U_r : 0 < r < 1\}$ tienen la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Demostración. Como C y $D = \Omega \setminus U$ son cerrados y disjuntos, por el lema de Urysohn, existe una función $f \in C_b(\Omega)$ tal que

$$0 \leq f \leq 1, \quad f(C) = \{1\} \quad \text{y} \quad f(D) = \{0\}.$$

Para $r \in [0,1]$, sea

$$U_r = f^{-1}\big((r,1]\big),$$

que es abierto en Ω, pues f es continua y $(r,1]$ es abierto en $[0,1]$ (en la topología relativa a la de $\mathbb{R}$).

Además,

$$C \subseteq f^{-1}\big((r,1]\big) = U_r \subseteq \overline{U}_r \subseteq f^{-1}\big([r,1]\big) \subseteq f^{-1}\big((0,1]\big) \subseteq U.$$

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

caso 1: Si $\partial U_r = \emptyset$ para algún $r \in (0,1)$, entonces

$$\overline{U}_r = U_r \cup \partial U_r = U_r.$$

Por tanto, U_r es abierto y cerrado en Ω, y así (i) es cierta.

caso 2: Si $\partial U_r \neq \emptyset$ para todo $r \in (0,1)$. Sean $r, r' \in (0,1)$ con $r \neq r'$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $r < r'$. Entonces

$$\overline{U}_{r'} = \overline{f^{-1}\big((r',1]\big)} \subseteq f^{-1}\big([r,1]\big) = U_r.$$

Sabemos que un conjunto abierto y su frontera son disjuntos. Por lo tanto,

$$\partial U_{r'} \subseteq \overline{U_{r'}} \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \partial U_r \cap U_r = \emptyset$$

implica que

$$\partial U_{r'} \cap \partial U_r = \emptyset.$$

Esto completa la demostración. □

Teorema 3.3 (**$\tau_{\wp(\Omega)}$-densidad de τ_μ en $\wp(\Omega)$**)**.** *Si $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$, entonces τ_μ es $\tau_{\wp(\Omega)}$-denso en $\wp(\Omega)$.*

Demostración. Basta probar que τ_μ intersecta cada elemento de $\mathcal{B}$ en la definición 3.1.
Si $I(C,U) \in \mathcal{B}$, por el lema 3.2, $I(C,U)$ contiene algún conjunto A abierto y cerrado en Ω, o una familia no numerable $\{U_r : 0 < r < 1\}$ de conjuntos abiertos en Ω cumpliendo las condiciones en (ii) del lema 3.2.
Primer caso: Si existe A abierto y cerrado, entonces $\partial A = \emptyset$ y por tanto $A \in \tau_\mu$. Así, $I(C,U) \cap \tau_\mu \neq \emptyset$.
Segundo caso: Los conjuntos $\{\partial U_r : 0 < r < 1\}$ son mutuamente disjuntos. Como μ es finitamente aditiva, para toda familia finita J de $r's$ en $(0,1)$:

$$\sum_{r\in J} \mu(\partial U_r) = \mu\left(\bigcup_{r\in J} \partial U_r\right) \leq \mu(\Omega) < +\infty. \tag{3.1}$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{0<r<1} \mu(\partial U_r) = \sup\left\{\sum_{r\in J} \mu(\partial U_r) : J \subseteq (0,1) \text{ y finito}\right\} \leq \mu(\Omega) < +\infty.$
Del problema resuelto 6.8 de Panchapagesan 1991, $\mu(\partial U_r) = 0$ salvo para un conjunto a lo sumo numerable de $r's \in (0,1)$. Así, existe algún $U_r \in \tau_\mu$. Luego $U_r \in I(C,U) \cap \tau_\mu$.
En cualquier caso, $I(C,U) \cap \tau_\mu \neq \emptyset$, lo cual demuestra el teorema. □

Corolario 3.4 (**$\tau_{\wp(\Omega)}$-densidad de $\tau_{\mu,\nu}$ en $\wp(\Omega)$**)**.** *Sean $\mu, \nu \in ba^+(\mathcal{A})$. Entonces $\tau_{\mu,\nu}$ es $\tau_{\wp(\Omega)}$-denso en $\wp(\Omega)$.*

Proposición 3.5. *$\mathcal{A}_\mu^\partial$ es una álgebra de Ω, para cualquier $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$. En consecuencia, $\mathcal{A}_\mu^\partial$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ que contiene a τ_μ, y por tanto $\mathcal{A}$ es $\tau_{\wp(\Omega)}$-denso en $\wp(\Omega)$.*

Teorema 3.6 (de aproximación). *Si $f \in C_b(\Omega)$, entonces existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones $\mathcal{A}_\mu^\partial$-simples tal que $\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_\infty = 0$.*

Demostración. Si f es real, ya que es acotada, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq f(w) \leq b$ para todo $w \in \Omega$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, sea

$$C_r = f^{-1}(-\infty, r].$$

Es claro que C_r es cerrado en Ω y además $C_r = \emptyset$ para $r < a$, y $C_r = \Omega$ para $r \geq b$.
Si $r_1 < r_2$, tenemos que

$$C_{r_1} = f^{-1}(-\infty, r_1] \subseteq f^{-1}(-\infty, r_2) \subseteq f^{-1}(-\infty, r_2] = C_{r_2},$$

por lo que, de la continuidad de f,

$$C_{r_1} \subseteq \mathring{C}_{r_2} \subseteq C_{r_2}.$$

ISNN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Ya que $\partial C_{r_2} = \partial \mathring{C}_{r_2}$ es disjunto con $\mathring{C}_{r_2}$, deducimos que

$$\partial C_{r_1} \cap \partial C_{r_2} = \emptyset.$$

Como μ es positiva, acotada y finitamente aditiva, se tiene que

$$\sum_{r\in[a,b]} \mu(\partial C_r) \leq \mu\left(\bigcup_{r\in[a,b]} \partial C_r\right) \leq \mu\left(\bigcup_{r\in[a,b]} C_r\right) = \mu\left(f^{-1}[a,b]\right) = \mu(\Omega) < +\infty$$

(ver (3.1) en la demostración del teorema 3.3), y así concluimos que $\mu(\partial C_r) = 0$ salvo un número a lo sumo numerable de r's en $[a,b]$, que denotaremos $E = \{r_1, \ldots, r_n, \ldots\}$.
Como $[a,b]$ es compacto, dado $k \in \mathbb{N}$ existe un cubrimiento finito

$$\left(t_i - \frac{1}{2^{k+1}}, t_i + \frac{1}{2^{k+1}}\right), \quad i = 1, \ldots, n(k)$$

de $[a,b]$ con $a < t_1 < \cdots < t_{n(k)} < b$; y por ser E a lo sumo numerable, podemos escoger $r_0^{(k)} = a < r_1^{(k)} < \cdots < r_{n(k)}^{(k)} = b$ tales que

$$r_i^{(k)} - r_{i-1}^{(k)} < \frac{1}{2^k} \quad \text{y} \quad r_i^{(k)} \notin E, \quad i = 1, \ldots, n(k).$$

Así, $C_{r_i^{(k)}} \in \mathcal{A}_\mu^\partial$ para $i = 1, \ldots, n(k)$ y además

$$\Omega = f^{-1}[a,b] = \bigcup_{i=2}^{n(k)} f^{-1}\left(r_{i-1}^{(k)}, r_i^{(k)}\right] \cup f^{-1}\left[a, r_1^{(k)}\right].$$

Como $C_{r_i^{(k)}} = f^{-1}\left(-\infty, r_i^{(k)}\right] = f^{-1}\left(a, r_i^{(k)}\right]$, tenemos que

$$f^{-1}\left(r_{i-1}^{(k)}, r_i^{(k)}\right] = C_{r_i^{(k)}} \setminus C_{r_{i-1}^{(k)}}$$

y luego

$$\Omega = C_{r_1^{(k)}} \cup \bigcup_{i=2}^{n(k)} \left(C_{r_i^{(k)}} \setminus C_{r_{i-1}^{(k)}}\right)$$

donde, por la proposición 3.5, cada $C_{r_i^{(k)}} \setminus C_{r_{i-1}^{(k)}}$ está en $\mathcal{A}_\mu^\partial$.
Si

$$A_1^{(k)} = C_{r_1^{(k)}} \text{ y } A_i^{(k)} = C_{r_i^{(k)}} \setminus C_{r_{i-1}^{(k)}}, \quad i = 2, \ldots, n(k),$$

entonces $\left\{A_i^{(k)} : i = 1, \ldots, n(k)\right\}$ es una $\mathcal{A}_\mu^\partial$-partición de Ω y

$$s_k = \sum_{i=1}^{n(k)} r_i^{(k)} \chi_{A_i^{(k)}}$$

es una función $\mathcal{A}_\mu^\partial$-simple y real, definida sobre Ω.
Ahora, dado $\epsilon > 0$ y tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k_0}} < \epsilon$, tenemos que para todo $w \in \Omega$

$$|s_k(w) - f(w)| < \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k_0}} < \epsilon \text{ si } k \geq k_0.$$

Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k - f\|_\infty = 0.$$

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Para $f \in C_b(\Omega)$ cualquiera, sean $f_1 = \operatorname{Re} f$ y $f_2 = \operatorname{Im} f$. Por el caso anterior, existen sucesiones $\left(s_n^{(1)}\right)_n, \left(s_n^{(2)}\right)_n$ de funciones $\mathcal{A}_\mu^\partial$-simples, reales y definidas sobre Ω tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n^{(i)} - f_i\|_\infty = 0, \quad i = 1, 2.$$

Luego, si $s_n = s_n^{(1)} + is_n^{(2)}$ para $n \in \mathbb{N}$, $(s_n)_n$ es una sucesión de funciones $\mathcal{A}_\mu^\partial$-simples definidas sobre Ω y

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_\infty = 0. \qquad \square$$

4. La Regularidad Exterior de $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$

Para $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$, introducimos el concepto de **regularidad exterior** en términos de los valores de μ en los conjuntos abiertos y caracterizamos este concepto. Usando los resultados 3.3 y 3.4 de la sección anterior establecemos un teorema de identidad, el cual jugará un papel fundamental en la siguiente sección.

Los conjuntos $orba^+(\mathcal{A})$ **y** $rba^+(\mathcal{A})$

Notación 4.1. Usaremos las siguientes notaciones:
$orba^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in ba^+(\mathcal{A}) : \mu \text{ exteriormente regular}\}$ y $rba^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in ba^+(\mathcal{A}) : \mu \text{ regular}\}$.

Si $ba(\mathcal{A}) = \{\mu : A \to \mathbb{K} : \mu \text{ aditiva y acotada}\}$, es bien conocido (ver 2.7) que $ba(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach cuando la adición vectorial y la multiplicación por escalares se definen conjunto por conjunto y la norma se da por

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \tag{4.1}$$

Proposición 4.2. *$ba^+(\mathcal{A})$ es un cono convexo cerrado en el espacio de Banach $ba(\mathcal{A})$.*

Por la proposición 17.24 de (Panchapagesan, 1991), tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Para cada $\mu \in ba(\mathcal{A})$, la variación total $v(\mu)$ es aditiva en $\mathcal{A}$. Además, para cada $E \in \mathcal{A}$*

$$\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A} \text{ y } A \subseteq E\} \le v(\mu)(E) \le 4 \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A} \text{ y } A \subseteq E\} \tag{4.2}$$

En consecuencia $v(\mu)$ es acotada.

Por la ecuación (4.2) del lema anterior, es claro que la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida en $ba(\mathcal{A})$ por la identidad (4.1) es equivalente a la norma de la variación total dada por $|\mu| = v(\mu)(\Omega)$. Por lo tanto, $(ba(\mathcal{A}), |\cdot|)$ es también un espacio de Banach, homeomorfo con $(ba(\mathcal{A}), \|\cdot\|_\infty)$ bajo la aplicación identidad.

Proposición 4.4. *Se tiene que:*

(i) $orba^+(\mathcal{A})$ es un subcono convexo cerrado del cono $ba^+(\mathcal{A})$ en el espacio de Banach $ba(\mathcal{A})$.

(ii) Para todo $r > 0$, las truncaciones $\bar{B}^r = orba^+(\mathcal{A}) \cap \bar{B}(0, r)$ son conjuntos convexos y cerrados de la bola $\bar{B}(0, r)$.

Proposición 4.5. *Sea $\mu \in bat^+(\mathcal{A})$. Entonces μ es exteriormente regular sobre $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}_r \text{ y } C \subseteq A\}$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Proposición 4.6. *Sea $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$.

(ii) Para cada $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \lim_{U \in D_A} \mu(U)$, donde $D_A = \{U \in \tau : A \subseteq U\}$ es dirigido por la relación $U \le V$ si $V \subseteq U$.

(iii) Para cada $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \lim_{C \in E_A} \mu(C)$, donde $E_A = \{C \in C_\tau : C \subseteq A\}$ es dirigido por la relación $C_1 \subseteq C_2$ si $C_1 \subseteq C_2$.

ISNN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

La proposición anterior, que es válida en cualquier espacio topológico Ω, puede ser fortalecida cuando Ω es normal y Hausdorff, mediante el teorema 3.3 y el corolario 3.4 de la sección anterior, si μ se restringe a $\mathcal{C}_\tau$.

Teorema 4.7. *Sean $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ y $C \in C_\tau$. Si $\nu \in ba^+(\mathcal{A})$ entonces* $\lim\limits_{U \in D_C \cap \tau_\mu} \mu(U) = \mu(C) = \lim\limits_{U \in D_C \cap \tau_{\mu,\nu}} \mu(U)$*., donde $D_C = \{U \in \tau : C \subseteq U\}$ es dirigido por $U \leq V$ si $V \subseteq U$.*

Demostración. Por la proposición anterior, $\mu(C) = \lim\limits_{U \in D_C} \mu(U)$. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $U_0 \in D_C$ tal que $\mu(U) < \mu(C) + \epsilon$, para todo $U \in D_C$ con $U \subseteq U_0$.
Por el teorema 3.3, $\tau_\mu \cap I(C, U_0) \neq \emptyset$ y por tanto existe $U_1 \in \tau_\mu$ tal que $C \subseteq U_1 \subseteq U_0$. Luego, para todo $U \in D_C \cap \tau_\mu$ con $U \subseteq U_1$ tenemos que $\mu(C) \leq \mu(U) \leq \mu(U_1) < \mu(C) + \epsilon$. En consecuencia, $\mu(C) = \lim\limits_{U \in D_C \cap \tau_\mu} \mu(U)$.

De manera análoga y usando el corolario 3.4 en lugar del teorema 3.3, deducimos el segundo resultado. □

Teorema 4.8 (de identidad). *Si $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ y $\nu \in ba^+(\mathcal{A})$, entonces μ está determinada por su restricción a $\tau_{\mu,\nu}$. En consecuencia, si $\mu, \nu \in orba^+(\mathcal{A})$ entonces $\mu_{|\tau_{\mu,\nu}} = \nu_{|\tau_{\mu,\nu}} \implies \mu = \nu$.*

Demostración. Sean $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ y $\nu \in ba^+(\mathcal{A})$. Por el teorema anterior,

$$\mu(C) = \lim_{U \in D_C \cap \tau_{\mu,\nu}} \mu(U), \quad \forall C \in \mathcal{C}_r. \tag{4.3}$$

Pero, por la proposición 4.5; $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A \quad \text{y}\, C \in \mathcal{C}_r\}$, $\forall A \in \mathcal{A}$. De esto y la identidad (4.3) se sigue que μ está determinada por $\mu_{|\tau_{\mu,\nu}}$. Si $\nu \in orba^+(\mathcal{A})$ y $\mu_{|\tau_{\mu,\nu}} = \nu_{|\tau_{\mu,\nu}}$, entonces
$\mu(C) = \lim\limits_{U \in D_C \cap \tau_{\mu,\nu}} \mu(U) = \lim\limits_{U \in D_C \cap \tau_{\mu,\nu}} \nu(U) = \nu(C), \quad \forall C \in \mathcal{C}_r$.
De la proposición 4.5 concluimos que $\mu = \nu$. □

Corolario 4.9. *Supongamos que $\tau \subseteq \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es una clase de subconjuntos de Ω. Si $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ es una función de conjuntos, entonces puede existir a lo sumo un $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ tal que $\mu_{|\tau_\mu} = \lambda_{|\tau_\mu}$.*

5. La Regularización Exterior de $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$

El objetivo de este sección es probar que para cada $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de un espacio Ω normal y Hausdorff, conteniendo los abiertos de Ω, existe una única $\bar{\mu} \in orba^+(\mathcal{A}(\tau))$ tal que $\bar{\mu} = \mu$ sobre la colección $\{A \in \mathcal{A}(\tau) : \bar{\mu}(\partial A) = 0\}$. A $\bar{\mu}$ la llamaremos *la regularización exterior de* μ. Cuando $\Omega = S$ es compacto y Hausdorff, se tiene la existencia de una única $\bar{\mu} \in rca^+(\mathcal{B}(S))$ tal que $\bar{\mu} = \mu$ sobre $\{A \in \mathcal{B}(S) \cap \mathcal{A} : \bar{\mu}(\partial A) = 0\}$. En este caso a $\bar{\mu}$ la llamaremos *la regularización de* μ.

Lema 5.1. *Si $C \in \mathcal{C}_\tau$ y $U_1, U_2 \in \tau$ son tales que $C \subseteq U_1 \cup U_2$, entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_\tau$ tales que $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$ y $C_1 \cup C_2 = C$.*

Utilizando el lema anterior se prueba la siguiente proposición.

Proposición 5.2. *Sea $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$. Si $\mu_*(U) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq U$ y $C \in \mathcal{C}_\tau\}$ para $U \in \tau$, entonces:*

(i) $\mu_*(U) \subseteq [0, +\infty)$.

(ii) $\mu_*(\emptyset) = 0$.

(iii) *μ_* es monótona. Esto es, $U_1, U_2 \in \tau$ y $U_1 \subseteq U_2 \implies \mu_*(U_1) \leq \mu_*(U_2)$.*

(iv) *μ_* es finitamente subaditiva en τ. Esto es,* $\mu_*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_*(U_i)$.

Definición 5.3 (La medida externa μ^* inducida por μ). *Sean $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ y μ_* como en la proposición 5.2. Definimos la medida externa μ^* inducida por μ en $\wp(\Omega)$ por $\mu^*(E) = \inf\{\mu_*(U) :\ E \subseteq U$ y $U \in \tau\}$.*

Proposición 5.4 (propiedades de μ^*). *Sea $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ y sea μ^* la medida externa inducida por μ en $\wp(\Omega)$. Entonces:*

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

(i) μ^* *está bien definida y* $\mu^*(\wp(\Omega)) \subseteq [0, \mu(\Omega)]$.

(ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(iii) μ^* *es monótona.*

(iv) μ^* *es finitamente subaditiva.*

(v) $\mu_*(\cdot) = \mu^*(\cdot) \leq \mu(.)$ *en* τ.

(vi) $\mu(\cdot) \leq \mu^*(\cdot)$ *en* $\mathcal{C}_\tau$.

(vii) μ^* *es claramente regular, en el siguiente sentido:* $\mu^*(E) = \text{ínf}\{\mu^*(U) : \ E \subseteq U \text{ y } U \in \tau\}$.

(viii) *Para todo* $A \in \mathcal{A}$, $\mu^*\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \mu(A) \leq \mu^*(\bar{A})$.

(ix) *Si* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\mu^*(\partial A) = 0$, *entonces* $\mu^*(A) = \mu(A)$ *y* $\mu(\partial A) = 0$.

Definición 5.5 (los conjuntos μ^*-medibles). *Sea* $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{E \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E), \ \forall B \in \wp(\Omega)\}$. *Los miembros de* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *serán llamados los conjuntos* μ^**-medibles. Sea* $\bar{\mu} = \mu^*_{|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}}$.

Proposición 5.6 (Propiedades de $\mathcal{M}_{\mu^*}$ y $\bar{\mu}$). *Sea* $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ *y sea* μ^* *la medida externa inducida por* μ. *Entonces:*

(i) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *es un álgebra que contiene a* $\mathcal{A}(\tau)$.

(ii) *Si* $E \subseteq \Omega$ *y* $\mu^*(\partial E) = 0$, *entonces* $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

(iii) *Si* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\mu^*(\partial A) = 0$, *entonces* $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ *y* $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

(iv) $\bar{\mu} \in orba^+(\mathcal{M}_{\mu^*})$.

Utilizando las proposiciones anteriores podemos establecer el primero de los dos teoremas principales de la sección.

Teorema 5.7 (La regularización exterior de $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$). *Sea* $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$. *Entonces:*

(i) *Existe una única* $\bar{\mu} \in orba^+(\mathcal{A}(\tau))$ *tal que* $A \in \mathcal{A}(\tau)$ *y* $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies \bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

(ii) *Esta única* $\bar{\mu}$ *es obtenida de* μ *vía:* $\mu_*(V) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}_\tau \text{ y } C \subseteq V\}$, $\forall V \in \tau$ *y* $\bar{\mu}(A) = \text{ínf}\{\mu_*(V) : V \in \tau \text{ y } A \subseteq V\}$, $\forall A \in \mathcal{A}(\tau)$

(iii) $\bar{\mu}\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \mu(A) \leq \bar{\mu}(\bar{A})$, *para todo* $A \in \mathcal{A}$.

A $\bar{\mu}$ *se le llama la* regularización exterior de μ.

Demostración.

(i) Sean $\mathcal{M}_{\mu^*}$ y $\bar{\mu}$ como en la definición 5.5. De la proposición 5.6 se tiene que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es un álgebra que contiene a $\mathcal{A}(\tau)$, $\bar{\mu} \in orba^+(\mathcal{M}_{\mu^*})$ y además $A \in \mathcal{A}$ y $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ y $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Considerando $\bar{\mu}$ restringida a $\mathcal{A}(\tau)$, tenemos que $\bar{\mu} \in orba^+(\mathcal{A}(\tau))$ es tal que $A \in \mathcal{A}(\tau)$ y $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies \bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Así $\bar{\mu}_{|_{\tau_{\bar{\mu}}}} = \mu_{|_{\tau_{\bar{\mu}}}}$ y del corolario 4.9, concluimos que esta $\bar{\mu}$ es única.

(ii) Es obvio, ya que la $\bar{\mu}$ en (i) es dada por 5.2 y 5.3.

(iii) De 5.4(viii) se tiene que para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mu^*\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \mu(A) \leq \mu^*(\bar{A})$ y de la definición 5.5 se sigue que $\bar{\mu}\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \mu(A) \leq \bar{\mu}(\bar{A})$ para todo $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Con el propósito de especializar el teorema anterior cuando Ω es un espacio compacto y Hausdorff, se tiene el siguiente lema.

ISSN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Lema 5.8. *Supongamos que S es un espacio compacto y Hausdorff. Entonces:*

(i) Cada $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ es σ-aditiva y regular, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos en S, conteniendo los abiertos de S.

(ii) Sea $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ como en (i). Si μ^*, $\bar{\mu}$ y $\mathcal{M}_{\mu^*}$ son como en la proposición 5.6 (ya que S es normal y Hausdorff), entonces μ^* es una medida exterior en $\wp(S)$, $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra conteniendo a $\mathcal{B}(S)$ y $\bar{\mu}$ es σ-aditiva y regular en $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Teorema 5.9 (La regularización de $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$). *Sea S un espacio compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos en S conteniendo a los abiertos en S. Sea $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$. Entonces:*

(i) Existe una única $\bar{\mu} \in rca^+(\mathcal{B}(S))$ tal que $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(S)$ y $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies \bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

(ii) Esta $\bar{\mu}$ es obtenida de μ vía: $\mu_*(V) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}_\tau \text{ y } C \subseteq V\}$, $\forall V \in \tau$ y $\bar{\mu}(A) = \inf\{\mu_*(V) : V \in \tau \text{ y } A \subseteq V\}$, $\forall A \in \mathcal{B}(S)$.

(iii) $\bar{\mu}$ satisface: $\bar{\mu}\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \mu(A) \leq \bar{\mu}\left(\bar{A}\right)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Demostración.

(i) Sean $\mathcal{M}_{\mu^*}$ y $\bar{\mu}$ como en la definición 5.5. De la proposición 5.6 y el lema 5.8 se tiene que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra conteniendo a $\mathcal{B}(S)$ y $\bar{\mu} \in rca^+(\mathcal{M}_{\mu^*})$ tal que $A \in \mathcal{A}$ y $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ y $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$. Considerando $\bar{\mu}$ restringida a $\mathcal{B}(S)$, tenemos que $\bar{\mu} \in rca^+(\mathcal{B}(S))$ es tal que $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(S)$ y $\bar{\mu}(\partial A) = 0 \implies \bar{\mu}(A) = \mu(A)$. Así $\bar{\mu}_{|_{\tau_{\bar{\mu}}}} = \mu_{|_{\tau_{\bar{\mu}}}}$ y del corolario 4.9 concluimos que $\bar{\mu}$ es única.

(ii) y (iii) son probadas exactamente igual que en 5.7(ii),(iii). □

6. La topología Lévy en orba$^+(\mathcal{A})$

En el cono orba$^+(\mathcal{A})$ definimos una topología τ_l, llamada la topología Lévy y describimos τ_l en términos de la convergencia de redes, la cual facilita la verificación de que τ_l es compatible con las operaciones del cono $orba^+(\mathcal{A})$ y que las truncaciones $\overline{B}(0,r) \cap orba^+(\mathcal{A})$ y las superficies $\{\mu \in orba^+(\mathcal{A}) : \|\mu\|_\infty = r\}$ son τ_l-cerrados para $r > 0$. Aunque la topología τ_l puede ser definida en $orba^+(\mathcal{A})$ para cualquier espacio topológico Ω, la hipótesis de que Ω es normal y Hausdorff nos permite asegurar que τ_l es Hausdorff.

Definición 6.1. *Si $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$, para cada $A \in \mathcal{A}^\partial_\mu$ y cada $\epsilon > 0$ sea $N(\mu; A, \epsilon) = \{\nu \in orba^+(\mathcal{A}) : |\nu(A) - \mu(A)| < \epsilon\}$.*

Proposición 6.2. *Sea $\mathcal{B}(\mu) = \left\{N(\mu; A, \epsilon) : A \in \mathcal{A}^\partial_\mu \text{ y } \epsilon > 0\right\}$ para cada $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$.*

Sea $\mathcal{N}(\mu)$ la colección de todas las intersecciones finitas de los miembros de $\mathcal{B}(\mu)$.

Sea $\tau_l = \{V \subseteq orba^+(\mathcal{A}) : \forall \mu \in V, \exists V(\mu) \in \mathcal{N}(\mu) / V(\mu) \subseteq V\}$. Entonces τ_l es una topología en $orba^+(\mathcal{A})$, y además cada $V \in \mathcal{N}(\mu)$ es una vecindad de μ.

Definición 6.3. *La topología τ_l definida en la proposición 6.2 se llama la topología de Lévy en $orba^+(\mathcal{A})$.*

Nota 6.1. La topología de la convergencia puntual $\tau_\mathcal{A}$ en $orba^+(\mathcal{A})$ (i.e. $\mu_\alpha \to \mu$ en $\tau_\mathcal{A} \Leftrightarrow \mu_\alpha(A) \to \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$) dada por la convergencia puntual en $\mathcal{A}$ es más fina que la topología τ_l (ver la proposición 6.7 más adelante), y claramente, como $\mathcal{A}^\partial_\mu$ varía con μ, la topología τ_l no es invariante por traslación como la topología de la convergencia puntual $\tau_\mathcal{A}$.

Teorema 6.4. *τ_l es Hausdorff.*

Nota 6.2. Como en el teorema 6.4 usa en su demostración el teorema de identidad, este es el lugar donde la hipótesis de que Ω sea normal y Hausdorff se necesita para la validez del teorema.

Proposición 6.5 (Convergencia en la topología Lévy). *Una red $(\mu_\alpha)_\alpha$ es τ_l-convergente a μ en $orba^+(\mathcal{A})$ si y solo si $\lim_\alpha \mu_\alpha(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}^\partial_\mu$.*

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{\alpha} \mu_\alpha = \mu$ en τ_l. Si $A \in \mathcal{A}_\mu^\partial$, dado $\epsilon > 0$ existe α_0 tal que $\mu_\alpha \in N(\mu; A, \epsilon), \quad \forall \alpha \geq \alpha_0$. Es decir $|\mu_\alpha(A) - \mu(A)| < \epsilon, \ \forall \alpha \geq \alpha_0$. Por lo cual, $\lim\limits_{\alpha} \mu_\alpha(A) = \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}_\mu^\partial$. Recíprocamente, supongamos que $\lim\limits_{\alpha} \mu_\alpha(A) = \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}_\mu^\partial$. Si $V \in \mathcal{N}(\mu)$, existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_\mu^\partial$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ tales que $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} N(\mu; A_i, \epsilon_i)$. Por hipótesis, para $\epsilon = \min\{\epsilon_i : i = 1, \ldots, n\}$ existen α_i tal que $|\mu_\alpha(A_i) - \mu(A_i)| < \epsilon, \ \forall \alpha \geq \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea $\alpha_0 > \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces, es claro que $\mu_\alpha \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} N(\mu; A_i, \epsilon) \subseteq V, \ \forall \alpha \geq \alpha_0$ y por tanto, $\mu_\alpha \to \mu$ en τ_l. □

Utilizando la proposición anterior, se puede probar que las operaciones de adición y multiplicación por escalares no-negativos son τ_l-continuas en $orba^+(\mathcal{A})$.

Teorema 6.6. *Las siguientes aplicaciones son continuas:*

(i)
$$\begin{aligned} (orba^+(\mathcal{A}), \tau_l) \times (orba^+(\mathcal{A}), \tau_l) &\to (orba^+(\mathcal{A}), \tau_l) \\ (\mu, \nu) &\to \mu + \nu \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} [0, +\infty) \times (orba^+(\mathcal{A}), \tau_l) &\to (orba^+(\mathcal{A}), \tau_l) \\ (a, \mu) &\to a\mu \end{aligned}$$

Teorema 6.7 (Sobre las truncaciones y las superficies). *Se tiene que:*

(i) La topología τ_l en $orba^+(\mathcal{A})$ es más débil que la topología de la convergencia uniforme en $\mathcal{A}$. Es decir, si $\sup\{|\mu_\alpha(A) - \mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} \to 0$ entonces $\mu_\alpha \to \mu$ en τ_l.

(ii) Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en $orba^+(\mathcal{A})$ que converge a μ en τ_l. Entonces $\|\mu\|_\infty = \lim\limits_{\alpha \in D} \|\mu_\alpha\|_\infty \leq \sup\{\|\mu_\alpha\|_\infty : \alpha \in D\} \leq +\infty$.

(iii) Para todo $r > 0$, las truncaciones $\overline{B}(0, r) \cap orba^+(\mathcal{A})$ y las superficies $\{\mu \in orba^+(\mathcal{A}) : \|\mu\|_\infty = r\}$ son τ_l-cerrados.

Demostración.

(i) Como $\mathcal{A}_\mu^\partial \subseteq \mathcal{A}$, (i) es evidente por la proposición 6.5.

(ii) Por la proposición 6.5, para $U \in \tau_\mu \subseteq \mathcal{A}_\mu^\partial$ tenemos que $\lim\limits_{\alpha \in D} \mu_\alpha(U) = \mu(U)$, y así $|\mu(U)| = \lim\limits_{\alpha \in D} |\mu_\alpha(U)| \leq \sup\{\|\mu_\alpha\|_\infty : \alpha \in D\}$. Como $\Omega \in \tau_\mu$, deducimos que $\|\mu\|_\infty = \mu(\Omega) = \lim\limits_{\alpha \in D} \mu_\alpha(\Omega) = \lim\limits_{\alpha \in D} \|\mu_\alpha\|_\infty \leq \sup\{\|\mu_\alpha\|_\infty : \alpha \in D\}$, ya que μ, μ_α son no-negativas y así monótonas.

(iii) Sea $(\mu_\alpha)_\alpha$ una red en $\overline{B}(0, r) \cap orba^+(\mathcal{A})$ tal que $\mu_\alpha \to \mu$ en $orba^+(\mathcal{A})$, en la topología τ_l.
De (ii) se sigue que $\|\mu\|_\infty = \lim\limits_{\alpha} \|\mu_\alpha\|_\infty \leq r$, y así $\mu \in \overline{B}(0, r) \cap orba^+(\mathcal{A})$. Esto prueba que $\overline{B}(0, r) \cap orba^+(\mathcal{A})$ es τ_l-cerrado.
De manera análoga, se tiene que $\{\mu \in orba^+(\mathcal{A}) : \|\mu\|_\infty = r\}$ es τ_l-cerrado. □

Nota 6.3. El resultado (iii) en el teorema anterior será fortalecido en la sección 8, cuando $\Omega = S$ es un espacio compacto y Hausdorff.

7. El espacio dual de $B(\Omega_0, \Sigma)$

Si Ω_0 es un conjunto no-vacío y Σ es un álgebra de conjuntos de Ω_0, sea $B(\Omega_0, \Sigma)$ el espacio de todas las funciones complejas que son límite uniforme de sucesiones de funciones Σ-simples. Entonces cada miembro de $B(\Omega_0, \Sigma)$ es acotado y luego, $(B(\Omega_0, \Sigma), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. En esta sección demostramos que su dual es $ba(\Sigma)$, en

ISSN 2588-0764 | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

el sentido de que existe un isomorfismo isométrico Φ de $B(\Omega_0, \Sigma)^*$ sobre $ba(\Sigma)$ tal que si $x^* \in B(\Omega_0, \Sigma)^*$ entonces $x^*(f) = \int_{\Omega_0} f \, d\Phi(x^*), \quad \forall f \in B(\Omega_0, \Sigma)$.

Recordemos que una función $s : \Omega_0 \to \mathbb{K}$ se llama Σ-simple si s toma un número finito de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ tal que $s^{-1}(\alpha_i) \in \Sigma$ para todo $i = 1, \ldots, n$. equivalentemente, s es de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ donde $E_i \in \Sigma$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

Definición 7.1. *Si $f : \Omega_0 \to \mathbb{K}$ es una función, decimos que f es Σ-medible si $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo conjunto boreliano B en $\mathbb{K}$.*

Definición 7.2. *Sea $B(\Omega_0, \Sigma)$ la colección de todas las funciones $f : \Omega_0 \to \mathbb{K}$ para las cuales existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones Σ-simples tal que $s_n \to f$ uniformemente en Ω_0.*

Se tienen los siguientes resultados.

Proposición 7.3. *Cada función escalar Σ-medible y acotada en Ω_0 pertenece a $B(\Omega_0, \Sigma)$.*

Proposición 7.4. *Si (Ω_0, τ_0) es un espacio topológico y $\tau_0 \subseteq \Sigma$, con Σ un álgebra de conjuntos de Ω_0. Entonces $C_b(\Omega_0) \subseteq B(\Omega_0, \Sigma)$.*

Proposición 7.5. *Sean Ω_0 y Σ como en la proposición 7.4. Entonces $C_b(\Omega_0)$ es cerrado en $B(\Omega_0, \Sigma)$ con la topología de la convergencia uniforme en Ω_0.*

Teorema 7.6 (Sobre el dual de $B(\Omega_0, \Sigma)$). *Sean Ω_0 un conjunto no-vacío y Σ un álgebra de Ω_0. Para cada $f \in B(\Omega_0, \Sigma)$, sea $\|f\|_\infty = \sup\{|f(w)| : w \in \Omega_0\}$. Entonces:*

(i) $B(\Omega_0, \Sigma)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\| \cdot \|_\infty$.

(ii) El dual $B(\Omega_0, \Sigma)^*$ de $B(\Omega_0, \Sigma)$ es isométricamente isomorfo con el espacio de Banach $ba(\Sigma)$, dotado de la norma $|\mu| = v(\mu)(\Omega_0)$, y para el isomorfismo $\Phi(x^*) = \mu_{x^*} \in ba(\Sigma)$, $x^* \in B(\Omega_0, \Sigma)^*$ se tiene la identidad $x^*(f) = \int_{\Omega_0} f \, d\mu_{x^*}$, $\forall f \in B(\Omega_0, \Sigma)$.

8. Sobre la convergencia y la compacidad en la topología Lévy

Utilizando los resultados de la sección 7 y el teorema de aproximación 3.6, damos una caracterización de la convergencia en el espacio $orba^+(\mathcal{A})$ con la topología Lévy en términos de funcionales lineales y positivos en $C_b(\Omega)^*$, donde Ω es un espacio normal y Hausdorff y $\mathcal{A}$ es un álgebra de Ω conteniendo los abiertos de Ω.

Cuando $\Omega = S$ es un espacio compacto Hausdorff, utilizando el teorema 5.9 sobre la regularización de μ en $ba^+(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de S conteniendo los abiertos de S y contenida en $\mathcal{B}(S)$ la $\sigma -$ álgebra de Borel en S, probamos que en el espacio $orba^+(\mathcal{A}) = rca^+(\mathcal{A})$ con la topología Lévy, las truncaciones y las superficies son compactos.

Estos dos resultados serán utilizados en la próxima sección para dar una prueba alterna del lema 2.18 que da la equivalencia entre el teorema de Krein-Milman y su versión baricéntrica, sin hacer referencia alguna al teorema de representación de Riesz.

Lema 8.1. *Sea $(\mu_\alpha)_\alpha$ una red en $orba^+(\mathcal{A})$ y sea $x^*_{\mu_\alpha}$ el funcional asociado con μ_α en $B(\Omega, \mathcal{A})^*$ (ver el teorema 7.6(ii)). Si $x^*_{\mu_\alpha}|_{C_b(\Omega)}$ converge a algún x^*_μ con $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ en la topología $\sigma(C_b(\Omega)^*, C_b(\Omega))$, entonces μ_α converge a μ en la topología τ_l.*

Demostración. En virtud de la proposición 6.5, basta ver que $\lim_\alpha \mu_\alpha(E) = \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{A}^\partial_\mu$. Como $\mu \in orba^+(\mathcal{A})$ y $\mu(\partial E) = 0$, es claro que $\mu\left(\overline{E}\right) \leq \mu\left(\overset{\circ}{E}\right) + \mu(\partial E) = \mu\left(\overset{\circ}{E}\right) \leq \mu(E)$ y por tanto

$$\mu\left(\overline{E}\right) = \mu(E) = \mu\left(\overset{\circ}{E}\right). \tag{8.1}$$

revista.bdlaciencia@utm.edu.ec | Vol. 10. Núm. 2 (39-55): mayo-agosto, 2025 | DOI: 10.33936/revbasdelaciencia.v10i2.7528

Como μ es exteriormente regular, por la proposición 4.5; $\mu\left(\overset{\circ}{E}\right) = \sup\left\{\mu(C) : C \subseteq \overset{\circ}{E} \text{ y } C \in \mathcal{C}_\tau\right\}$. Por definición, $\mu\left(\overline{E}\right) = \inf\{\mu(U) : \bar{E} \subseteq U \in \tau\}$. En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ existen conjuntos $C \in \mathcal{C}_\tau$ y $U \in \tau$ tales que $C \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E} \subseteq U$ y

$$\mu\left(\overset{\circ}{E}\right) < \mu(C) + \frac{\epsilon}{4} \text{ y } \mu(U) < \mu\left(\overline{E}\right) + \frac{\epsilon}{4}. \tag{8.2}$$

Luego, de las ecuaciones (8.1) y (8.2), $\mu(U - C) < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, como $C \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq \overline{E} \subseteq U$ y Ω es normal; por el lema de Urysohn, existen $g, h \in C_b(\Omega)$ tales que $0 \leq g, h \leq 1$, $g_{|_C} = 1$, $g_{|_{\Omega \setminus \overset{\circ}{E}}} = 0$ y $h_{|_{\bar{E}}} = 1$, $h_{|_{\Omega\setminus U}} = 0$. Como μ y μ_α son positivas, es claro que los funcionales x^*_μ, $x^*_{\mu_\alpha}$ son positivos, ya que $x^*_\mu(f) = \int_\Omega f\, d\mu \geq 0$ y $x^*_{\mu_\alpha}(f) = \int_\Omega f\, d\mu_\alpha \geq 0$ para todo $f \geq 0$ en $B(\Omega, \mathcal{A})$. Pero, por la proposición 7.4, $C_b(\Omega) \subseteq B(\Omega, \mathcal{A})$ y así x^*_μ, $x^*_{\mu_\alpha}$ son funcionales lineales positivos en $C_b(\Omega)$. En consecuencia, $\chi_C \leq g \leq \chi_{\overset{\circ}{E}} \leq \chi_E \leq \chi_{\overline{E}} \leq h \leq \chi_U$ y esto implica que

$$\mu(C) \leq x^*_\mu(g) \leq \mu\left(\overset{\circ}{E}\right) = \mu(E) = \mu\left(\overline{E}\right) \leq x^*_\mu(h) \leq \mu(U). \tag{8.3}$$

De esto se sigue que

$$0 \leq x^*_\mu(h) - x^*_\mu(g) \leq \mu(U) - \mu(C) = \mu(U \setminus C) \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{8.4}$$

y por consiguiente

$$x^*_\mu(g) \leq \mu(E) \leq x^*_\mu(g) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{8.5}$$

También, como $g \leq \chi_E \leq h$, tenemos que

$$x^*_{\mu_\alpha}(g) \leq \mu_\alpha(E) \leq x^*_{\mu_\alpha}(h), \quad \forall \alpha \in D. \tag{8.6}$$

De las ecuaciones (8.4), (8.5) y (8.6) se sigue que

$$\begin{aligned} x^*_{\mu_\alpha}(g) - x^*_\mu(g) - \frac{\epsilon}{2} &\leq \mu_\alpha(E) - \mu(E) \\ &\leq x^*_{\mu_\alpha}(h) - x^*_\mu(g) \\ &= x^*_{\mu_\alpha}(h) - x^*_\mu(h) + x^*_\mu(h) - x^*_\mu(g) \\ &< x^*_{\mu_\alpha}(h) - x^*_\mu(h) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Ahora, por hipótesis, $x^*_{\mu_\alpha}(f) \to x^*_\mu(f)$ para todo $f \in C_b(\Omega)$, y luego para $g, h \in C_b(\Omega)$ existe α_0 tal que $|x^*_{\mu_\alpha}(g) - x^*_\mu(g)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|x^*_{\mu_\alpha}(h) - x^*_\mu(h)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. Como $(x^*_{\mu_\alpha} - x^*_\mu)(g)$ y $(x^*_{\mu_\alpha} - x^*_\mu)(h)$ son reales,

$$-\frac{\epsilon}{2} < x^*_{\mu_\alpha}(g) - x^*_\mu(g) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } -\frac{\epsilon}{2} < x^*_{\mu_\alpha}(h) - x^*_\mu(h) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0. \tag{8.8}$$

Utilizando las inecuaciones en (8.8) en las inecuaciones (8.7) tenemos que $-\epsilon < \mu_\alpha(E) - \mu(E) < \epsilon$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$. Es decir, $\lim_\alpha \mu_\alpha(E) = \mu(E)$ y esto completa la demostración. □

Lema 8.2. *Sea $(\mu_\alpha)_\alpha$ una red en orba$^+(\mathcal{A})$ tal que $\mu_\alpha \to \mu \in$ orba$^+(\mathcal{A})$ en la topología τ_l. Entonces $x^*_{\mu_\alpha} \to x^*_\mu$ en la topología $\sigma(C_b(\Omega)^*, C_b(\Omega))$, donde $x^*_{\mu_\alpha}$, x^*_μ se dan como en el teorema 7.6(ii), y se consideran sus restricciones a $C_b(\Omega)$.*

Los dos lemas anteriores conforman el siguiente teorema.

Teorema 8.3. *Sea Ω un espacio normal y Hausdorff y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos en Ω tal que $\tau \subseteq \mathcal{A}$. Si $(\mu_\alpha)_\alpha$ es una red en orba$^+(\mathcal{A})$. Entonces $\mu_\alpha \to \mu \in$ orba$^+(\mathcal{A})$ en la topología τ_i si y sólo si $x^*_{\mu_\alpha}|_{C_b(\Omega)} \to x^*_\mu|_{C_b(\Omega)}$ en la $\sigma(C_b(\Omega)^*, C_b(\Omega))$-topología, donde $x^*_{\mu_\alpha}$ y x^*_μ son como en el teorema 7.6(ii).*

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Portoviejo - Manabí - Ecuador

Cuando $\Omega = S$ es un espacio compacto y Hausdorff; el siguiente teorema nos dice que las truncaciones $\bar{B}(0,r) \cap rca^+(\mathcal{A})$ y las superficies $\{\mu \in rca^+(\mathcal{A}) : \|\mu\|_\infty = 1\}$ son $\tau_l -$ compactas. La demostración de este teorema se fundamenta en la regularización de $\mu \in ba^+(\mathcal{A})$ (ver el teorema 5.9).

Teorema 8.4 **(τ_l-compacidad de las truncaciones y superficies en $rca^+(\mathcal{A})$).** *Sea S un espacio compacto y Hausdorff y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos en S satisfaciendo $\tau \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(S)$, donde τ es la topología de S. Entonces:*

(i) $orba^+(\mathcal{A}) = rca^+(\mathcal{A})$.

(ii) Para $r > 0$, la truncación $\bar{B}(0,r) \bigcap rca^+(\mathcal{A})$ es $\tau_l -$ compacto.

(iii) Para $r > 0$, la superficie $\{\mu \in rca^+(\mathcal{A}) : \|\mu\|_\infty = r\}$ es $\tau_l -$ compacto.

El teorema anterior se utilizará en la próxima sección para deducir el teorema de representación de Riesz a partir de la versión baricéntrica del teorema de Krein-Milman.

9. Resultado principal: El teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman.

Utilizando el teorema 8.4 damos una demostración del lema 2.18, la cual no hace referencia alguna al teorema de representación de Riesz. Así, podemos establecer la equivalencia entre el teorema de Krein-Milman y su versión baricéntrica, independientemente del teorema de representación de Riesz, y luego, como se vio en 2.5, deducimos el teorema de representación de Riesz a partir del teorema de Krein-Milman. En esta forma, efectivamente el teorema de representación de Riesz es una consecuencia del teorema de Krein-Milman.

Lema 9.1 (=Lema 2.18)**.** *Sea X un espacio localmente convexo y Hausdorff, y sea K un compacto no-vacío en X. Entonces $x \in \overline{Co}(K)$ si y sólo si existe una medida boreliana y regular μ de probabilidad en K tal que x es el baricentro de μ, i.e. $x^*(x) = \int_K x^*\, d\mu, \quad \forall x^* \in X^*$.*

Demostración. Sean x, $(x_\alpha)_\alpha$ y $(\mu_\alpha)_\alpha$ como en la demostración del lema 2.18. Ahora, sin usar el teorema de representación de Riesz y utilizando el teorema 8.4, probaremos que existe una medida boreliana y regular μ de probabilidad en K tal que x es su baricentro.

Claramente $(\mu_\alpha)_\alpha$ es una red en $rca^+(\mathcal{B}(K))$ con $\mu_\alpha(K) = 1$ para todo α, por lo que
$(\mu_\alpha)_\alpha \subseteq \{\mu \in rca^+(\mathcal{B}(K)) : \|\mu\|_\infty = 1\}$, el cual, por el teorema 8.4(iii), es τ_l-compacto. Por tanto, existen una subred $(\mu_\beta)_\beta$ de $(\mu_\alpha)_\alpha$ y $\mu \in rca^+(\mathcal{B}(K))$ con $\mu(K) = 1$ tal que $\mu_\beta \to \mu$ en la topología τ_l.

Por el teorema 8.3, esto es equivalente a $x^*_{\mu_\beta} \to x^*_\mu$ en la topología $\sigma(C(K)^*, C(K))$, con $x^*_{\mu_\beta}$ y x^*_μ como en el teorema 7.6. Así $\int_K f\, d\mu_\beta \to \int_K f\, d\mu, \quad \forall f \in C(K)$, y en particular,

$$\int_K x^*\, d\mu_\beta \to \int_K x^*\, d\mu, \quad \forall x^* \in X^*; \tag{9.1}$$

ya que $x^*_{|_K} \in C(K)$ para todo $x^* \in X^*$. Por otro lado, $x_\alpha \to x$ y luego $x_\beta \to x$. Así

$$x^*(x_\beta) = \int_K x^*\, d\mu_\beta \to x^*(x). \tag{9.2}$$

De esto y de la convergencia en (9.1), concluimos que $x^*(x) = \int_K x^*\, d\mu, \quad \forall x^* \in X^*$. Es decir, x es el baricentro de $\mu \in rca^+(B(K))$ con $\mu(K) = 1$.

La prueba del recíproco es exactamente igual a la dada en el lema 2.18, ya que esta es independiente del teorema de representación de Riesz. □

Como hemos obtenido el lema 2.18 (=lema 9.1) independientemente del teorema de representación de Riesz, el teorema 2.19 que da la equivalencia entre el teorema de Krein-Milman y su versión baricéntrica, de hecho puede considerarse probado sin ninguna referencia al teorema de representación de Riesz.

Con la conclusión anterior y con la demostración hecha en 2.5, tenemos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 9.2. *El teorema de Krein-Milman implica el teorema de representación de Riesz.*

Demostración. La demostración es similar a la dada en la subsección 2.5. □

10. Declaración de conflicto de interés de los autores

El autor declara no tener conflicto de intereses.

11. Referencias

Aliprantis, C. D., & Border, K. C. (2006). *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide* (3rd). Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-29587-9

Bogachev, V. I. (2007). *Measure Theory* (Vol. 1). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441

Cohn, D. L. (2013). *Measure Theory* (2nd). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6956-8

Conway, J. B. (1990). *A Course in Functional Analysis* (2nd). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5200-9

Dunford, N., & Schwartz, J. T. (1957). *Linear operators. 1. General theory*. Interscience Publ.

Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd). Wiley.

Guerra, N., & Jiménez, F. (2010). *Análisis Convexo*. Universidad de Sevilla.

Hiriart-Urruty, J.-B., & Lemaréchal, C. (2001). *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56468-0

Masani, P. (2006). The outer regularization of finitely-additive measures over normal topological spaces. *Measure Theory Oberwolfach 1981: Proceedings of the Conference Held at Oberwolfach, Germany, June 21–27, 1981*, 116-144.

Megginson, R. E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3

Panchapagesan, T. (1991). *Medida e Integración*. Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Mérida, Venezuela.

Phelps, R. (2001). *Lectures on Choquet's Theorem*. Springer Berlin Heidelberg. https://books.google.com.ec/books?id=CxXcWPyHMkwC

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press.

Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.

Rudin, W. (2012). *Análisis funcional*. Reverte.

12. Contribución de Autores

Autor	Contribución
Carlos Eduardo Cova Salaya	Redacción, selección del tema, revisión bibliográfica