Revista Cognosis
Revista de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
ISSN 2588-0578

# APLICACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA

ENSEÑANZA DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS EN CARRERAS DE INGENIERÍA

AUTORES: Jorge Manuel Ríos Obregón[1]
Regla María Bernal Gutiérrez[2]
Eberto Pablo Gutiérrez Morales[3]
Eberto Tuniesky Gutiérrez De León[4]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: Jorge.rios@ikiam.edu.ec

Fecha de recepción: 04 - 07 - 2020 Fecha de aceptación: 19 - 09 - 2020

RESUMEN

La enseñanza de la matemática requiere ser sustenta en la aplicación de estrategia de enseñanza aprendizaje que contribuyan a una mejor comprensión de sus teorías, por ello este trabajo parte de la necesidad de ejemplificar la aplicación de una estrategia didáctica para la enseñanza del Cálculo Infinitesimal en las carreras de ingeniería. La estrategia se sostiene en un modelo centrado en la sistematización formativa en cálculo infinitesimal es expresión de la relación entre la dimensión analítica infinitesimal del Cálculo para ingenieros y dimensión sistematización contextualizada de recursos del Cálculo Infinitesimal. La estrategia parte del Nivel de Esencialidad dado en objetivos formativos de la Facultad de Ciencias de la Tierra y Agua, de la Universidad Regional Amazónica Ikiam, se valora el Nivel Estratégico con la determinación del estado actual y el estado deseado, así como el entorno donde se desarrolla el proceso de formación en Cálculo Infinitesimal. El Nivel de

[1] Licenciado en Matemática por la Universidad de Oriente (Cuba), Doctor en Ciencias pedagógicas por la Universidad de Oriente (Cuba) y Master en Matemática Aplicada por la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas (Cuba). Profesor a Tiempo Completo. Titular Agregado 1. Universidad Regional Amazónica. Ecuador.
[2] Ingeniera Química, por la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas (Cuba), Master en Eficiencia Energética, por la Universidad de Sancti Spiritus José Martí Pérez, Master en Nuevas Tecnologías para la Educación, por la Universidad de Sancti Spiritus José Martí Pérez. Profesor a Tiempo Completo. Ocasional. Universidad Estatal Amazónica. Ecuador. E-mail: reglabernal2@gmail.com
[3] Licenciado en Matemática por el Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela" (Cuba), Doctor en Ciencias Pedagógicas por la Universidad de Oriente (Cuba). Directivo y profesor a tiempo completo en la Educación Superior en Cuba y otros países por más de 30 años. Universidad Estatal Amazónica. Ecuador.
[4] Ingeniero Industrial, por la Universidad Central Marta Abreu de Las Villas (Cuba), Master en Dirección Universidad de Sancti Spíritus José Martí Pérez (Cuba). Profesor a Tiempo Completo. Ocasional. Universidad Estatal Amazónica. Ecuador.

Concreción, se ejemplifica a través del tema “Cálculo Integral de funciones reales de una variable real”. Este nivel para el Cálculo infinitesimal en las carreras de ingeniería tiene dos subprocesos: subproceso de formación analítica infinitesimal y subproceso de sistematización contextualizada. Ambos subprocesos cuentan con objetivos específicos, orientaciones pedagógicas y acciones; así como ejemplos y ejercicios de integrales indefinidas y definidas orientados a lograr una sistematización teórica y práctica de estos objetos matemáticos que surgen de la necesidad del cálculo de magnitudes físicas. Finalmente, se evalúa la efectividad de la estrategia formativa.

PALABRAS CLAVE: Matemática; didáctica; enseñanza aprendizaje; estrategia de enseñanza.

**APPLICATION OF A DIDACTIC STRATEGY FOR THE TEACHING OF UNDEFINED AND DEFINED INTEGRALS IN ENGINEERING CAREERS**

ABSTRACT

The teaching of mathematics needs to be supported by the application of a teaching-learning strategy that contributes to a better understanding of its theories, therefore this work is based on the need to exemplify the application of a didactic strategy for the teaching of Infinitesimal Calculus in the engineering careers. The strategy is based on a model focused on the formative systematization in infinitesimal calculus, which is an expression of the relationship between the infinitesimal analytical dimension of Calculus for engineers and the contextualized systematization of resources in Infinitesimal Calculus. The strategy starts from the Level of Essentiality given in the training objectives of the Faculty of Earth and Water Sciences, of the Ikiam Regional Amazon University, the Strategic Level is valued with the determination of the current state and the desired state, as well as the environment where the training process in Infinitesimal Calculus is developed. The Level of Specification is exemplified through the topic "Integral Calculus of real functions of a real variable." This level for Infinitesimal Calculus in engineering majors has two threads: infinitesimal analytic training thread and contextualized systematization thread. Both sub-processes have specific objectives, pedagogical orientations and actions; as well as examples and exercises of indefinite and definite integrals aimed at achieving a theoretical and practical systematization of these mathematical objects that arise from the need to calculate physical quantities. Finally, the effectiveness of the training strategy is evaluated.

KEYWORDS: Mathematics; didactics; teaching learning; teaching strategy.

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la dinámica del proceso de formación en Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería se materializa mediante estrategias formativas que permite definir y concretar los objetivos adecuados a esta formación, en estudiantes de ingeniería, como constructo praxiológico estructurado a partir de acciones organizadas.

Las carreras de ingeniería proyectan, ejecutan y controlan las prácticas culturales, expresadas a través de la resolución de ejercicios de cálculo de magnitudes físicas, para desarrollar esa práctica ingenieril a través de la conjugación de los objetivos formativos que tiene para el cumplimiento de su encargo social y los intereses formativos individuales de sus estudiantes; cuyo resultado es la conformación y desarrollo de un estudiante de ingeniería acorde a las exigencias sociales.

Este complejo proceso hace que la estrategia formativa en Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería se configure teniendo en cuenta teniendo en cuenta el carácter lógico e integrador de la “sistematización formativa en Cálculo Infinitesimal” desde dos perspectivas: la “formación analítica en Cálculo Infinitesimal” y el “cálculo de magnitudes físicas”; como síntesis de los procesos de construcción teóricas del Cálculo y aplicación de recursos del Cálculo respectivamente.

DESARROLLO

En correspondencia con la regularidad que emana del “Modelo para la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Infinitesimal en las carreras de Ingeniería, centrado en la sistematización formativa” (Ríos, Bernal, & Morell 2017), se propone una Estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo infinitesimal en las carreras de ingeniería (Ríos & Bernal 2020).

La Estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo infinitesimal en las carreras de ingeniería (Ríos & Bernal 2020) tiene en cuenta el carácter dialéctico y contradictorio entre los niveles de esencialidad, estratégico y de concreción; lo que justifica una estrategia activa, contextualizada, flexible y que tenga en cuenta lo social e individual del proceso formativo y sus relaciones.

Cada nivel de la estrategia está conformado por procedimientos que concretan en la práctica las configuraciones y las relaciones entre configuraciones del Modelo para la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Infinitesimal en las carreras de Ingeniería, centrado en la sistematización formativa (Ríos, Bernal, & Morell 2017). Se diseña los procedimientos para el cumplimiento y perfeccionamiento del proceso de formación en Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería en su relación con el entorno social, condición indispensable para propiciar la apropiación de la cultura ingenieril desde la perspectiva matemática, y responder así a las demandas sociales.

Esta estrategia didáctica centrada en la sistematización formativa en cálculo infinitesimal es, por tanto, expresión de la relación entre la dimensión analítica infinitesimal del Cálculo para ingenieros y dimensión sistematización contextualizada de recursos del Cálculo Infinitesimal.

Para corroborar los efectos que provoca la referida estrategia didáctica se realiza su aplicación en las carreras de Ingeniería en Agua e Ingeniería en Ecosistema, en el tema “Cálculo Integral de funciones reales de una variable real” de la asignatura Matemática I.

*Aplicación de la estrategia*

*Nivel de Esencialidad*

La Facultad de Ciencias de la Tierra y Agua, de la Universidad Regional Amazónica Ikiam tiene entre sus objetivos formativos, la responsabilidad social de llevar a cabo la formación integral y sistemática de los profesionales que cursan las carreras de Ingeniería en Aguas e Ingeniería en Ecosistemas.

Para determinar el estado actual del nivel de conocimientos que tienen los estudiantes antes de aplicar la estrategia se realizó un examen diagnóstico que permiten medir los conocimientos previos que sobre el tema. El examen mostró que no hay dominio de los conceptos básicos, que sobre las funciones se evaluaron, así como imprecisiones en las fórmulas para el cálculo de las magnitudes espaciales.

La estrategia formativa en Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería permite alcanzar como estado deseado que los estudiantes utilicen los recursos teóricos del Cálculo Infinitesimal en la descripción e interpretación de los diferentes fenómenos y procesos relacionados con la ingeniería y en la resolución problemas de cálculo de magnitudes físicas, para lo que también harán uso de los asistentes matemáticos.

*Nivel Estratégico*

Posteriormente a la determinación del estado actual y el estado deseado se realizó una valoración del entorno donde se desarrolla el proceso de formación en Cálculo Infinitesimal para la carrera de Ingeniería Industrial.

La Universidad Regional Amazónica Ikiam es una institución de nivel superior que se encuentra en un proceso de consolidación y fomento. Su facultad de Ingeniería de la Tierra y Agua cuenta con una dirección y un claustro responsabilizado con la formación de ingenieros con adecuada preparación matemática.

Las carreras de Ingeniería en Agua e Ingeniería en Ecosistema, de la Universidad Regional Amazónica Ikiam tiene a su disposición una buena infraestructura tecnológica para la implementación de la estrategia formativa. Las diferentes disciplinas de la carrera se sirven de un laboratorio de computación equipado con máquinas que permiten utilizar los asistentes matemáticos en sus versiones actuales.

Las carreras de Ingeniería en Agua e Ingeniería en Ecosistema se estudian en la Universidad Regional Amazónica Ikiam solo en la modalidad de presencial y la disciplina Matemática se desarrolla en sus tres primeros semestres. En la misma se estudian modelos y métodos matemáticos cuyas herramientas fundamentales pertenecen al Cálculo Infinitesimal. Teniendo en cuenta la matrícula, iguales semestres de ambas ingenierías se unen para recibir las asignaturas de Matemática.

La determinación del estado actual, el estado deseado y la valoración del entorno en su vínculo con la sistematización formativa en Cálculo Infinitesimal permitió concretar como objetivo de la estrategia formativa: Orientar el proceso de formación en Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería hacia el logro de una dinámica contextualizada en la que la formación analítica infinitesimal y la sistematización contextualizada de sus recursos teóricos constituyen sus procesos esenciales.

El objetivo se alcanza a través de un desarrollo coherente entre los subprocesos, sus políticas y acciones; promoviendo y dinamizando la sistematización formativa en Cálculo Infinitesimal en la carrera de Ingeniería Industrial lo cual se sitúa en el tercer nivel de concreción de la estrategia propuesta.

*Nivel de Concreción*

Este nivel se ejemplifica a través del tema "Cálculo Integral de funciones reales de una variable real" de la asignatura Matemática I, en la que se estudian modelos y métodos matemáticos cuyas herramientas pertenecen al Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable.

La composición temática de la asignatura es la siguiente:

Tema 1. Límite y Continuidad de funciones reales de una variable.

Tema 2. Cálculo Diferencial de funciones reales de una variable.

Tema 3. Cálculo Integral de funciones reales de una variable.

La ejemplificación de la aplicación de la estrategia formativa se realiza en el tema No. 3 "Cálculo Integral de funciones reales de una variable" que tiene como objeto de estudio el problema general: determinación de la medida de conjuntos, el cual se concreta en los problemas particulares: cálculo de áreas de figuras planas limitadas por curvas y cálculo del volumen de un sólido de revolución. El área de figuras planas y el volumen de sólidos construidos con el empleo de las funciones constituyen las magnitudes objeto de cálculo en este tema.

El tema se desarrolla en trece clases, de ellas 6 clases teóricas de tres horas cada una y 7 clases de prácticas de dos horas cada una. En cada encuentro se implementan los dos subprocesos descritos en la estrategia los cuales cuentan con las orientaciones pedagógicas que se concretan en acciones para dar cumplimiento a los objetivos específicos de cada uno.

En este nivel de concreción la estrategia formativa en Cálculo infinitesimal para la carrera de ingeniería tiene dos subprocesos: subproceso de formación analítica infinitesimal y subproceso de sistematización contextualizada. Ambos subprocesos cuentan con objetivos específicos, orientaciones pedagógicas y acciones.

*Subproceso de formación analítica infinitesimal.*

Objetivo específico: realizar una estructuración del contenido, desde una sistematización formativa sustentada en la formalización matemática de relaciones espaciotemporales y su representación visual, que propicie una familiarización con las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal requeridas en la formación como ingeniero.

*Orientaciones pedagógicas:*

- Motivar al estudiante hacia la explicación de los significados de los conceptos básicos del tema.
- Inducir la comprensión conceptual por medio de gráficas.
- Establecer los nexos entre los diferentes conceptos del Cálculo Infinitesimal.

Teniendo en cuenta las orientaciones pedagógicas se realizan las siguientes acciones:

- Formalizar matemáticamente los conceptos del Cálculo Infinitesimal y las relaciones entre ellos.
- Desarrollar la interpretación geométrica de los conceptos del Cálculo Infinitesimal.
- Establecer los conceptos matemáticos como expresión de los modelos de los objetos de medición.

Para darle cumplimiento a estas acciones se parte del problema del área $A$ de la región S limitada por la gráfica de una función continua $f, donde\ f(x) \geq 0$ y las rectas verticales $x = a, x = b$ y el eje $x$.

Al intentar resolver el problema del área tenemos que hacer notar al estudiante que solo se conoce el área de figuras geométricas de lados rectos, como el rectángulo, la cual se define como el producto del largo por el ancho. Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región de lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema es precisar esta idea intuitiva dando una definición exacta de área.

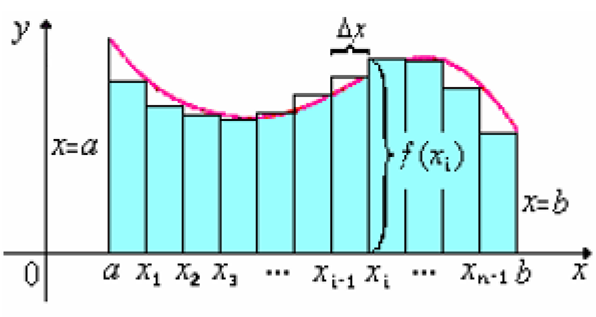


Figura 1. Aproximación al área de la A de la región S por medio de $n$ rectángulos tomando los puntos extremos de la derecha

Como es sabido, la idea a seguir consiste en obtener una aproximación del área A de la región S por medio de $n$ rectángulos (figura 1) e ir haciendo $n$ cada vez más grande y mostrar al estudiante como se hace cada vez más pequeño el error que se comete al calcular el área A de la región S por medio de $n$ rectángulos.

Luego pasamos al límite (cuando $n$ tiende al infinito) de la suma de las áreas de estos rectángulos, lo que permite concluir que:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (1)$$

Este ejemplo, permite mostrar como la "formalización matemática de relaciones espaciotemporales" y la "representación visual del conocimiento del Cálculo Infinitesimal" se complementan en la construcción del conocimiento del Cálculo Infinitesimal, a la vez que se contraponen en el empleo de diferentes formas de expresión.

La "formalización matemática de relaciones espaciotemporales" hace uso del lenguaje simbólico de la matemática y la "representación visual del conocimiento del Cálculo Infinitesimal" utiliza métodos gráficos-intuitivos, lo que constituye una expresión singular de la relación entre lo abstracto y lo concreto.

Otra acción a desarrollar es:

- Estimular la observación de la relación entre las características de los modelos de los objetos de medición y el procedimiento operacional que se utiliza para cuantificar la magnitud.

Para dar cumplimiento a esta acción se trata el problema de la distancia recorrida por un objeto durante cierto período, si se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde $a \leq t \leq b$ y $f(t) \geq 0$.

Tomamos las lecturas de la velocidad en los instantes $t_0 = a$, $t_1$, $t_2$, …, $t_n = b$ de forma que la velocidad sea aproximadamente constante en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,2,\dots,n$. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = \frac{b-a}{n}$.

Durante el primer intervalo la velocidad es, aproximadamente, $f(t_0)$ y por consiguiente la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\Delta t$ . De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es $f(t_1)\Delta t$. Así, sucesivamente, en el intervalo n la distancia recorrida está es aproximadamente $f(t_{n-1})\Delta t$. La distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximada a:

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

En cada subintervalo se ha tomado la lectura de velocidad del extremo izquierdo.

Si usamos la velocidad de los puntos en los extremos derechos, en lugar de los izquierdos, la estimación para la distancia total recorrida queda:

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Si en cada subintervalo se toma cualquier punto muestra comprendido entre los puntos extremos izquierdos o derechos, entonces la estimación para la distancia total recorrida es:

$$f(t_1^*)\Delta t + f(t_2^*)\Delta t + \cdots + f(t_n^*)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t$$

Mientras mayor sea la frecuencia con que medimos la velocidad, más exactas se vuelven las estimaciones, de modo que se puede intuir que la distancia exacta $d$ recorrida es el límite de esas respectivas expresiones:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t \qquad (2)$$

En virtud de que la ecuación (2) tiene la misma forma que la expresión dada para el área en la ecuación (1) se concluye que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad. Este ejemplo coadyuva a sistematizar el cálculo del área debajo de la curva $y = f(x)$ tratado anteriormente y como se procede en su solución de manera análoga a la anterior se estimula la observación de la relación entre las características de los modelos de los objetos de medición y el procedimiento operacional que se utiliza para cuantificar la magnitud.

- Demostrar teoremas, propiedades y otros recursos teóricos del Cálculo Infinitesimal.

A esta acción se le da cumplimiento pidiendo al alumno demostrar que el área de la región $S$ limitada por la gráfica de una función discontinua $y = f(x)$, donde $f(x) \geq 0$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje $x$ es posible calcularla mediante la expresión

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Quedan por ejemplificar las siguientes acciones que se proponen en la estrategia:

- Propiciar en las prácticas de cálculo la diferenciación de las relaciones de dependencia entre las características de los modelos de los objetos de medición y el tipo de procedimiento operacional utilizado en su transformación.
- Potenciar la abstracción de rasgos no esenciales en las relaciones de dependencia que se diferencian.
- Propiciar que se comparta, confronte y discuta acerca de los elementos esenciales en las relaciones de dependencia diferenciadas; para precisar elementos que orientan la elección de uno u otro procedimiento operatorio en una situación concreta de cálculo.

Estas acciones aunque pueden ser tratadas a través en las situaciones problémicas ya mostradas, el profesor las puede ejecutar mediante el problema de calcular el volumen de un sólido en revolución que se genera al rotar la función $y = f(x)$ , donde $f(x) \geq 0$ alrededor del eje $x$ .

Luego debe solicitar al estudiante que resuelva el problema de calcular el volumen de un sólido en revolución que ahora se genera al hacer rotar la función $y = f(x)$ , donde $f(x) \geq 0$ alrededor del eje $y$ .

La introducción del concepto de integrales impropias se realiza a partir del concepto de área bajo la curva al que se arriba como resultado de la ejecución de la primera acción, el cual constituye una generalización del mismo. Este proceder contribuye a la formación analítica en Cálculo Infinitesimal.

*Subproceso de sistematización contextualizada.*

Objetivo específico: realizar una construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional en la que se efectúe la sistematización formativa en Cálculo Infinitesimal y el cálculo de magnitudes físicas sustentadas en la aplicación de recursos teóricos y tecnológicos de la matemática.

Orientaciones pedagógicas:

- Identificar y establecer correspondencia entre los objetivos de la carrera, disciplina y asignaturas.
- Facilitar la construcción de significados y sentidos desde los contenidos del Cálculo Infinitesimal, donde los estudiantes desarrollan y hacen suyos los conocimientos, habilidades, valores y valoraciones.
- Seleccionar y organizar, en un orden creciente de dificultad, una familia de ejercicios que será empleada en las actividades de cálculo que desarrollen los estudiantes (Laffita, 2007).

Esta familia de ejercicios se compone de dos subfamilias. La primera de ellas, que llamaremos Subfamilia I, está integrada por ejercicios a resolver mediante la aplicación ingenieril de recursos teóricos del Cálculo Infinitesimal. Estos ejercicios deben estar ordenados a partir de su nivel de dificultad; en un orden creciente que va desde ejercicios cuya resolución ofrece ligera dificultad, hasta ejercicios más difíciles de resolver con aplicaciones de recursos teóricos.

La segunda subfamilia de ejercicios, llamada Subfamilia II, se compone de ejercicios que por las características del modelo del objeto de medición que se considera resultan muy difíciles de enfrentar sin la aplicación de los asistentes matemáticos, como expresión de recursos tecnológicos de la matemática. Esta subfamilia también debe estar organizada en un orden creciente de dificultad.

En ambas subfamilias de ejercicios, como principal elemento a considerar en el establecimiento del orden creciente de dificultad, se han de tomar las características del modelo del objeto de medición que interviene en el ejercicio. Dentro de estas características se encuentran: naturaleza de al menos una de las variables que intervienen en el modelo (cantidad de valores que asumen estas variables y dominio al cual pertenecen), dominio al cual pertenecen las constantes involucradas en el modelo, número de operaciones aritméticas y de composición que conforman el modelo; entre otras.

- Los mayores niveles de dificultad en la familia de ejercicios seleccionada deben estar en correspondencia con el nivel de profundidad de los objetivos del proceso formativo en Cálculo Infinitesimal.
- Considerar que la selección de los ejercicios está dada por el tipo de carrera en la cual se lleva a cabo el proceso de sistematización. Las magnitudes a cuantificar y los modelos que se utilicen deben corresponderse con aquellos que más se aplican en la actividad profesional.

De acuerdo con las orientaciones pedagógicas de este subproceso se conforma la subfamilia I (Laffita, 2007) de ejercicios que se emplean en las actividades de cálculo que desarrollen los estudiantes. Se utilizan, para el cálculo de áreas y volúmenes, conjuntos determinados por rectas y parábolas. Se incluyen también ejercicios formales de cálculo de integrales que respondan a las formas siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int (f(x))^n dx$ | 5. | $\int senf(x)df(x)$ |
| 2. | $\int (f(x))^n df(x)$ | 6. | $\int cosf(x)df(x)$ |
| 3. | $\int \dfrac{df(x)}{(f(x))^n}$ | 7. | $\int f(x)e^x dx$ |
| 4. | $\int a^{f(x)} df(x) \qquad a \in N$ | 8. | $\int f(x) lnx dx$ |

Donde $n = 1,2,3$ y $f(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros y exponente entero, hasta el grado tres. Para las integrales definidas e impropias se consideran casos semejantes a los anteriores.

Por su parte, en las actividades con aplicación asistentes matemáticos se conforma la subfamilia II (Laffita, 2007) en la que se emplean integrales de la forma:

1. $\int (f(x))^n dx$
2. $\int \frac{dx}{f(x)}$
3. $\int a^{f(x)} dx \quad a \in R_+^* - \{1\}$
4. $\int senf(x) dx$
5. $\int cosf(x) dx$
6. $\int f(x) seng(x) dx$
7. $\int f(x) cosg(x) dx$
8. $\int f(x) lng(x) dx$

y las correspondientes integrales definidas e impropias; donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones elementales, no solamente polinómicas, cuya complejidad está asociada al dominio al cual pertenecen las constantes, al número de operaciones aritméticas y de composición que intervienen en la función, entre otros factores.

A continuación, se ejemplifican las acciones en correspondencia con las orientaciones pedagógicas de este subproceso.

- Asegurar el nivel de partida para el desarrollo de experiencias previas de cálculo de forma tal que adquieran significado los conceptos y procedimientos.

Para esta acción se indican ejercicios que conducen a integrales definidas sencillas y que como resultado se obtienen fórmulas de áreas de figuras planas conocidas.

Ejercicio 1. Dada la función $f(x) = a$ ( $a$ constante real) dibuje su gráfica y calcule el área bajo la curva en el intervalo $[0,\ a]$.

Ejercicio 2. Dada la función $f(x) = mx$ ( m constante) su gráfica y calcule el área bajo la curva en el intervalo $[0, b]$

- Orientar el proceso de solución de ejercicios de la subfamilia I que puedan ser fácilmente resueltos por medio de la aplicación de recursos teóricos del Cálculo Infinitesimal.

Ejercicio 3. Calcule las siguientes integrales.

a) $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$

b) $\int (2x^2 - 3)^3 dx$

c) $\int_{-2}^{0} \frac{v^2}{(v^3 - 2)^2} dv$

d) $\int_0^1 xe^x dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

f) $\int_1^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx$

- Orientar el proceso de solución de solución de ejercicios de la subfamilia II que puedan ser fácilmente resueltos por medio de la aplicación de asistentes matemáticos.

Ejercicio 4. Determine el valor de las siguientes integrales

a) $\int \frac{1.2x^3 + 8.3}{x + 2.7} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x^2 + x + \sqrt{x+1}}{x+1} dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + senx}{(cosx)^2} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

e) $\int sen(x^2) dx$

f) $\int \frac{sen(x)}{x} dx$

Ejercicio 5. Resuelve, en $x$, la siguiente ecuación

$$\int_3^x \frac{2t-2}{t^2 - 2t} dt = \ln(\frac{2}{3}x - 1)$$

Ejercicio 6. En Estadística se define la función de densidad normal o Gauss por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{en el intervalo } (-\infty, \infty)$$

Utilice un asistente matemático y verifique que se cumple la igualdad indicada en cada inciso.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \mu^2 - \sigma^2$

- Orientar el proceso de solución de ejercicios de la subfamilia I con la aplicación de asistentes matemáticos y que fueron previamente resueltos por medio de la aplicación de recursos teóricos del Cálculo Infinitesimal para establecer la comparación de sus resultados.

Se ejecuta esta acción resolviendo los ejercicios 1, 2 y 3 con la aplicación de un asistente matemático y se compara la solución obtenida en ambos casos y de ser diferente la solución se demuestra la equivalencia.

- Proponer la solución de ejercicios de las subfamilias I y II, pero expresados como problemas de cálculo de magnitudes.

Ejercicios de la subfamilia I

Ejercicio 7. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones.

a) $y = x^2 + 1, \quad y = 5$

b) $x = y^2, \quad y = 2 - x, \quad y = -2, \quad y = 3$

c) $y^2 = 4 + x, \quad y^2 + x = 2$

Ejercicio 8. Sea $f(x) = x^2 + 1$, calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región bajo la gráfica de la función $f$ alrededor del eje $x$, entre $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 9. Calcule el volumen del sólido resultante de girar alrededor de la recta $y = 0$, la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$ y por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 10. Una piscina mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de profundidad; se llena con agua de mar (cuya densidad es $1030 kg/m^3$) hasta los 2,5 m.

a) Calcule la fuerza hidrostática sobre el fondo.

b) Calcule la fuerza hidrostática sobre un extremo.

Ejercicios tipos en la Subfamilia II

Ejercicio 11. Calcule el área de:

a) La región acotada por las gráficas de $y = sen(x^2)), y = \cos(x)$ , $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

b) La región acotada por las gráficas de $y = \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}$, $x = -2$ y $y = 0$.

c) La región que se encuentra bajo la gráfica de $y = e^{\sqrt{x}}$, $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 12. Calcule el volumen del sólido resultante

a) Al girar, alrededor del eje $x$, la región bajo la gráfica de $y = 3 - x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

b) Al girar, alrededor del eje $y$, la región infinita que se encuentra a la derecha del eje $y$ y entre las gráficas $y = e^{-x^2}$ y $y = 0$.

Ejercicio 13. Calcule la fuerza hidrostática sobre la superficie del túnel que cruza una bahía si es un cilíndrico de 3 m de radio y está sumergido a 15 m de profundidad.

- Propiciar análisis individuales y colectivos de las características de los modelos de los objetos de medición que se consideran y la influencia de estos en la elección de uno u otro procedimiento operatorio.

Esta acción se ejecuta como resumen de cada actividad de resolución de los ejercicios donde se hace énfasis, en el caso de este tema, en la utilización o no de un asistente matemático para resolver la situación planteada en cada caso.

*Evaluación de la estrategia formativa*

La evaluación de la estrategia se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de cada de cada subproceso; el de formación analítica infinitesimal y el de sistematización contextualizada. Para ello, se toman como referentes los criterios de evaluación de la efectividad de la estrategia propuestos por (Fardales, Diéguez, & Puga, 2012).

Para evaluar la efectividad de la estrategia se proponen dos dimensiones: Apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal y Construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional. Estas dimensiones están estructuradas a partir de tres indicadores evaluados en una escala de medición ordinal (desde la categoría valorativa muy bajo (1) hasta la categoría muy alto (5). Se asume una relación lineal entre cada dimensión y sus indicadores donde el valor de cada una de ellas es el resultado de promediar el valor de sus respectivos indicadores.

Como instrumento de medición para la recolección de las evidencias empíricas se propone una guía de observación de la actividad de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

Guía de observación

1. Apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal requeridas en la formación de ingenieros.
   a) Lenguaje matemático: Uso de un lenguaje oral y escrito que sea claro y preciso.
   b) Comprensión del contenido: Empleo de propiedades y características matemáticas de magnitudes en las variantes formal, gráfica y verbal; que le permita la descripción de interpretación de los diferentes fenómenos y procesos relacionados con la ingeniería.
   c) Independencia cognitiva: Desarrollo de estrategias de aprendizaje que le permita utilizar conscientemente sus propios mediadores en este proceso, dirigidos a formar sólidas estructuras mentales, flexibles, integradas y generalizadas a las que pueda acceder rápidamente.
2. Construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional.
   a) Estructuración metodológica: Determinación de los recursos requeridos para la solución de problemas relacionados con la práctica ingenieril.
   b) Ejecución procedimental: Aplicación de procedimientos adecuados a los recursos seleccionados para la resolución del problema.
   c) Proceder reflexivo: Inferencia e interpretación de resultados a partir del modelo matemático utilizado en la resolución de problemas y del recurso tecnológico empleado.

La guía de observación se aplica mediante el siguiente modelo para la recolección de la información.

Modelo aplicado para la recolección de información.

| | Dimensiones | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal requeridas en la formación de ingenieros. | | | | | | Construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional. | | | | | |
| | Lenguaje matemát. | | Compren. del contenido | | Independen. cognitiva | | Estructurac. metodológica | | Ejecución procedim.. | | Proceder reflexivo | |
| **Etapa / No** | **I** | **II** | **I** | **II** | **I** | **II** | **I** | **II** | **I** | **II** | **I** | **II** |
| **1** | | | | | | | | | | | | |
| **2** | | | | | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | | | | | |
| **4** | | | | | | | | | | | | |
| **5** | | | | | | | | | | | | |
| **6** | | | | | | | | | | | | |
| **7** | | | | | | | | | | | | |
| **8** | | | | | | | | | | | | |
| **9** | | | | | | | | | | | | |
| **10** | | | | | | | | | | | | |

Escala de medición ordinal (desde la categoría valorativa muy bajo (1) hasta la categoría muy alto (5))

Tabla 1. Resultados de las evaluaciones del grupo por indicador según las etapas del estudio.

| Apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Indicadores | Eta | MI | MA | M | Media | DS | CV |
| Lenguaje matemático | I | 1 | 4 | 2 | 2,42 | 0,77 | 0,31 |
| | II | 2 | 5 | 4 | 4 | 0,88 | 0,32 |
| Comprensión del contenido | I | 1 | 4 | 3 | 2,63 | 0,90 | 0,34 |
| | II | 2 | 5 | 4 | 4 | 0,58 | 0,26 |
| Independencia cognitiva | I | 1 | 3 | 2 | 1,79 | 0,71 | 0,39 |
| | II | 3 | 5 | 3 | 3,47 | 0,61 | 0,17 |
| Construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad | | | | | | | |
| Indicadores | Eta | MI | MA | M | Media | DS | CV |
| Estructuración metodológica | I | 1 | 4 | 2 | 2,21 | 0,92 | 0,41 |
| | II | 2 | 5 | 4 | 4,11 | 0,81 | 0,19 |
| Ejecución procedimental | I | 1 | 4 | 3 | 2,63 | 0,90 | 0,34 |
| | II | 2 | 5 | 4 | 3,79 | 1,08 | 0,28 |
| Proceder reflexivo | I | 1 | 3 | 2 | 2,11 | 0,74 | 0,35 |
| | II | 2 | 4 | 3 | 3,11 | 0,74 | 0,23 |

MI: Mínimo Valor, MA: Máximo Valor, M: Mediana, ME: Media, DS: Desviación estándar. CV: Coeficiente de variación.

En general puede afirmarse que la dimensión apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal requeridas en la formación de ingenieros mostró un comportamiento favorable, lo que se muestra mediante el aumento en sus valores medios en el tránsito de una etapa a la otra, acompañada además de una baja variabilidad (véase Tabla 2).

Tabla 2. Resultados de las evaluaciones del grupo por dimensiones en cada etapa de estudio.

| Dimensión | Etapa | ME | DE | CV | Valor p |
|---|---|---|---|---|---|
| Apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal | I | 2,80 | 0,50 | 0,18 | 0,00 |
| | II | 3,82 | 0,25 | 0,07 | |
| Construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional | I | 2,31 | 0,66 | 0,29 | 0,00 |
| | II | 3,66 | 0,50 | 0,14 | |

ME: Media, DS: Desviación estándar. CV: Coeficiente de variación, Valor p basado en el test de Wilcoxon.

Cuando se analiza el centro de la distribución de los valores (media y mediana) que caracterizó, durante la primera etapa, a los indicadores de esta dimensión (lenguaje matemático, comprensión del contenido e independencia cognitiva), puede afirmarse que estos resultaron evaluados en las categorías de bajo y medio. Sin embargo, en la siguiente etapa los indicadores lenguaje matemático y comprensión del contenido mostraron un cambio más favorable (alto) en relación con el reflejado por la independencia cognitiva, que fue más discreto (medio), cuestión que pudiese explicarse por la restricción temporal en que se instrumentó la aplicación parcial de la estrategia, en el sentido de que el tiempo de duración de la misma pudo ser insuficiente para que los estudiantes desarrollasen a plenitud estrategias de aprendizaje que le permitan utilizar conscientemente sus propios mediadores en este proceso. No obstante, si el análisis se centra en la variabilidad mostrada por ellos, puede afirmarse que en general fue estable en ambas etapas para el lenguaje matemático, no así para la comprensión del contenido y la independencia cognitiva, que mostraron una ligera disminución.

Por otra parte, si el análisis se focaliza en los indicadores que conforman la dimensión construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional (estructuración metodológica, ejecución procedimental y proceder reflexivo), puede afirmarse que los centros de sus distribuciones (véase mediana y media en tabla 1, anexo muestran un comportamiento caracterizado por un desplazamiento hacia los valores máximos de la escala valorativa empleada (alto). No obstante, en el tránsito hacia la segunda etapa, la estructuración metodológica refleja el de mejor resultado, seguido por la ejecución procedimental y el poder reflexivo.

En síntesis, el grupo de estudiantes realizó avances en relación con los logros esperados en cada uno de los indicadores, lo cual se refleja tanto en la apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal como en la construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional, pues ambas dimensiones experimentan cambios significativos ($p<0,05$) que indican la efectividad de las acciones instrumentadas en la estrategia (véase Tabla 2).

## CONCLUSIONES

La complejidad del proceso en la estrategia formativa del Cálculo Infinitesimal para las carreras de ingeniería se aborda teniendo presente el carácter lógico e integrador de la "sistematización formativa en Cálculo Infinitesimal" desde dos perspectivas: la "formación analítica en Cálculo Infinitesimal" y el "cálculo de magnitudes físicas" y, ello se logra desde la síntesis de los procesos de construcción teóricas del Cálculo y aplicación de recursos del Cálculo respectivamente.

La estrategia didáctica para la enseñanza del Cálculo Infinitesimal en las carreras de ingeniería, aplicada al tema "Cálculo Integral de funciones reales de una variable", permite valorar en los subprocesos de formación analítica infinitesimal y de sistematización contextualizad a través de los ejemplos y ejercicios desarrollados y propuestos.

Los principales resultados con la aplicación de la estrategia se evidencian en el desarrollo de la construcción del contenido de integrales indefinidas y definidas desde una realidad profesional expresados en el aumento de los indicadores estructuración metodológica, ejecución procedimental y proceder reflexivo.

Se comprueba avances en el grupo de estudiantes, en relación con los logros esperados en cada uno de los indicadores, y ello refleja la apropiación de las bases conceptuales y metodológicas del Cálculo Infinitesimal, así como en la construcción del contenido del Cálculo Infinitesimal desde una realidad profesional, pues ambas dimensiones experimentan cambios significativos que indican la efectividad de las acciones instrumentadas en la estrategia aplicada.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fardales, V, Diéguez, R, & Puga, A. (2012). Estrategia didáctica para la formación estadística del profesional de medicina. PEDAGOGÍA PROFESIONAL, 12(2).

Laffita, P. (2007). Una alternativa para sistematizar las ejecuciones computarizadas y no computarizadas de las habilidades de la matemática superior en una disciplina docente. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias. Santiago de Cuba.

Ríos, J. & Bernal, R. (2020). Estrategia didáctica para La enseñanza del cálculo infinitesimal en las carreras de ingeniería. REVISTA COGNOSIS. ISSN 2588-0578, 5(edición especial agosto), 37-50

Ríos, J., Bernal, R., & Morell, L. (2017). Modelo para la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo infinitesimal en las carreras de ingeniería centrado en la sistematización formativa. REVISTA DIDASC@LIA: DIDÁCTICA y EDUCACIÓN. ISSN 2224-2643, 8(2), 49-64